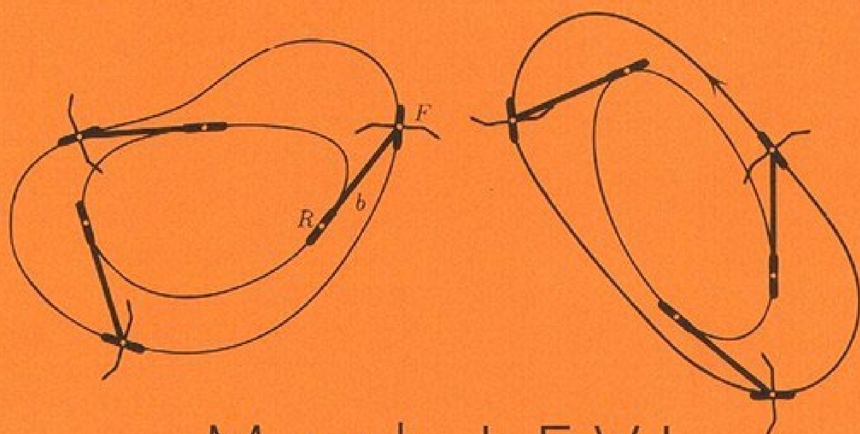
CÁNH CỬA MỞ RỘNG

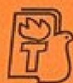
THỢ CƠ KHÍ TOÁN HỌC

The Mathematical Mechanic

GIẢI TOÁN BẰNG TRỰC QUAN VẬT LÝ



Mark LEVI



NHÀ XUẤT BẢN TRẺ

THỢ CƠ KHÍ TOÁN HỌC

BIỂU GHI BIÊN MỤC TRƯỚC XUẤT BẢN ĐƯỢC THỰC HIỆN BỞI THƯ VIỆN KHTH TP.HCM

Levi, Mark

Thợ cơ khí toán học – Giải toán bằng trực quan vật lý / Mark Levi ; Huy Nguyễn dịch.
- T.P. Hồ Chí Minh : Trẻ, 2011.

240 tr. ; 20cm. - (Cánh cửa mở rộng). Nguyên bản : The mathematical mechanic.

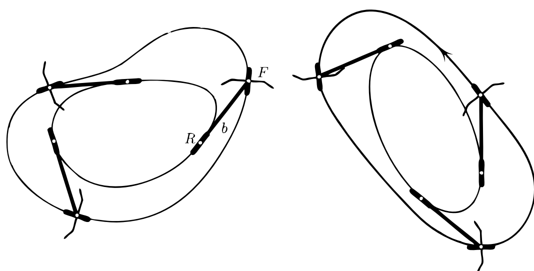
1. Vật lý toán học. I. Huy Nguyễn. II. Ts: The mathematical mechanic.

510 -- dc 22
L664

THỢ CƠ KHÍ TOÁN HỌC

The Mathematical Mechanic

GIẢI TOÁN BẰNG TRỰC QUAN VẬT LÝ



Mark LEVI

Huy Nguyễn *dịch*

NHÀ XUẤT BẢN TRẺ

Mục lục

1
GIỚI THIỆU

> Thật tình cờ một trong những phát kiến toán học vĩ đại nhất mọi thời đại lại được dẫn dắt bởi trực quan vật lý.
>
> — George Polya, nói đến khám phá của Archimedes về phép tích phân

1.1 Toán học đối đầu Vật lý

Trở lại thời Liên bang Xô-viết những năm đầu thập kỷ 1970, lớp cử nhân chúng tôi – gồm khoảng 40 sinh viên năm hai ngành toán và lý, được huy động đi lao động mùa hè ở miền quê. Công việc của chúng tôi là trộn bê-tông và dựng các xi-lô tại một trong các nông trang tập thể tại đây. Bạn tôi Anatole và tôi được phân công xúc sỏi. Công việc hoàn thành và chúng tôi cảm thấy thoải mái (như bất cứ ai cũng có thể cảm thấy trong hoàn cảnh đó). Anatole theo chuyên ngành vật lý còn tôi thì chuyên toán. Như những kẻ hâm mộ hai đội tuyển đối kháng, mỗi chúng tôi ra sức thuyết phục người còn lại rằng lĩnh vực của mình ưu việt hơn. Anatole nói một cách quả quyết rằng toán học là đầy

tớ của vật lý. Tôi phản pháo rằng toán học có thể tồn tại bất chấp vật lý còn vật lý thì không. Tôi nói thêm các định lý là vĩnh hằng. Các giả thuyết vật lý thì hết đúng rồi sai. Dù vậy tôi đã không cho Anatole biết trước rằng lý do tôi chọn chuyên ngành toán học là để rèn luyện cái công cụ cốt yếu cho vật lý – lĩnh vực mà tôi dự tính sẽ theo đuổi sau này. Thực ra, mùa hè trước khi vào đại học, tôi đã tình cờ gặp thầy vật lý của mình. Ông đã hỏi về các dự tính của tôi cho học kỳ mùa thu. "Bắt đầu chuyên ngành toán của em", tôi đáp. "Gì cơ? Toán? Anh khùng rồi!" ông đáp lại. Tôi coi đó như một lời khen (và có lẽ xác nhận quan điểm của ông).

1.2 Quyển sách này nói về điều gì

Đây không phải là "một trong những cuốn bìa mềm,to, dày, đủ để giết thời gian qua hai mùa gió, mà nếu được ném thẳng tay thì sẽ khiến một con trâu nước khuỵu gối" (Nancy Banks-Smith, nhà phê bình truyền hình người Anh). Với kích thước nhỏ của nó, cuốn sách này sẽ không hạ gục được ai, ít ra không thể hạ gục ai bằng tác động vật lý của nó. Tuy nhiên, cuốn sách thực sự là một đòn giáng trả – hay có thể chỉ là một cú chích chống lại quan niệm cho rằng toán học là đầy tớ của vật lý. Trong cuốn sách này, vật lý bị đặt vào vị trí phục vụ toán học, và tỏ ra là một đầy tớ có năng lực (xin lỗi các nhà vật lý). Những ý tưởng vật lý có thể là ý tưởng khai mở thực thụ và gợi ra lời giải cực kỳ giản đơn cho một bài toán toán học. Hai chủ thể này gắn bó khăng khít đến nỗi cả hai sẽ chịu tổn thất nếu bị tách rời. Sự đổi vai có thể rất hiệu quả, như cuốn sách này minh chứng.

Hoàn toàn có thể tranh cãi xem việc tách hai bộ môn này ra có là một cái gì quá nhân tạo hay không*.

Điểm qua lịch sử. Cách giải toán bằng trực quan vật lý ít nhất có từ thời Archimedes (khoảng năm 287 tr. CN – khoảng năm 212 tr. CN). Ông đã chứng minh định lý tích phân nổi tiếng về thể tích hình trụ, hình cầu và hình nón bằng cách sử dụng một cái cân thăng bằng giả tưởng. Bản tóm tắt của định lý này được khắc lên bia mộ của ông. Cách tiếp cận của Archimedes có thể được tìm thấy trong cuốn [P]. Đối với Newton, hai chủ đề này vốn là một. Các cuốn [U] và [BB] trình bày những lời giải vật lý rất đẹp cho các bài toán toán học. Rất nhiều những phát kiến toán học cơ bản (như Hamilton, Riemann, Lagrange, Jacobi, Möbius, Grassman, Poincaré) đã được dẫn dắt từ những suy xét vật lý.

Có hay không một công thức phổ quát cho cách tiếp cận vật lý? Như với công cụ bất kỳ, vật chất hay tinh thần, cách tiếp cận này có khi tốt và có khi không. Khó khăn chính là "nhìn" ra bản chất vật lý của bài toán**. Một số bài toán phù hợp với cách giải này, một số khác thì không (cố nhiên, cuốn sách này chỉ bao gồm dạng thứ nhất). Tìm ra mô

---

* "Toán học là một nhánh của vật lý lý thuyết nơi mà phần thực nghiệm là rẻ tiền" (V. Arnold [ARN]). Không chỉ các thí nghiệm trong cuốn sách này là rẻ tiền – thậm chí còn miễn phí, mà thực chất là các thực nghiệm giả tưởng (bài toán 2.2; 3.3; 3.13, và thực ra hầu hết các bài toán trong cuốn sách này).

** Đây là cách tiếp cận đi ngược trào lưu chung: thông thường một người bắt đầu bằng một bài toán vật lý, rồi triển khai nó thành một bài toán toán học; ở đây chúng ta làm ngược lại.

phỏng vật lý cho một bài toán cụ thể có khi dễ dàng, và có khi không; người đọc có thể có ý kiến riêng của mình sau khi lướt qua những trang sách này.

Một bài học mà một sinh viên có thể rút ra từ việc đọc cuốn sách này là tìm kiếm một ý nghĩa vật lý trong toán học là rất có ích.

Sự chặt chẽ của toán học. Lập luận vật lý của chúng ta sẽ không hoàn toàn chặt chẽ. Những lập luận này chỉ là phác thảo của những chứng minh chặt chẽ, được diễn đạt bằng ngôn ngữ vật lý. Tôi có chuyển ngữ "chứng minh" vật lý thành chứng minh toán học cho một vài bài toán chọn lọc. Làm việc này một cách có hệ thống sẽ biến quyển sách thành một pho sách"to, dày và chán ngắt". Tôi hy vọng người đọc sẽ nhận ra hình mẫu để nếu có hứng thú sẽ có khả năng tự xử lý những trường hợp mà tôi đã bỏ qua.Với lời trần tình này, tôi cảm thấy bớt áy náy trong việc sử dụng từ "chứng minh" xuyên suốt cuốn sách mà bỏ qua dấu ngoặc kép.

Điểm chốt ở đây là lập luận vật lý trở thành công cụ để khám phá và để có một trực quan sâu sắc – hai bước đi trước tính chặt chẽ của toán học. Như Archimedes đã viết, "Đương nhiên việc thiết lập một chứng minh sẽ dễ dàng hơn nhiều nếu trước đó đã có người nắm được khái niệm sơ khởi của bài toán". ([ARC], tr. 8)

Một cách tiếp cận rõ ràng. Thay vì phiên dịch "chứng minh" vật lý thành chứng minh chặt chẽ, việc thiết lập có hệ thống "các tiên đề thực chất" có lẽ sẽ là một dự án thú vị. Đây sẽ là một tập hợp các tiên đề thực chất của cơ học, tương tự như các tiên đề hình học/số học của Euclid – mà trong

đó các chứng minh được cho ở trong cuốn sách này trở nên chặt chẽ.

Ta thể tưởng tượng một nền văn minh ngoài trái đất mà ở đó người ta phát triển cơ học trước, như một bộ môn chặt chẽ và thuần túy mang tính tiên đề. Trong thế giới song hành này, một người nào đó ắt đã viết một cuốn sách về việc sử dụng hình học để chứng minh các định lý cơ học.

Có thể bài học ở đây là con người không nên hoàn toàn tập trung vào cách tiếp cận này hay cách tiếp cận kia, mà nên coi đó như hai mặt của một đồng xu. Cuốn sách này là một phản ứng chống lại sự thờ ơ khá phổ biến đối với khía cạnh vật lý của toán học.

Sơ lược về tâm lý học. Những cách giải vật lý trong cuốn sách này có thể được diễn dịch ra ngôn ngữ toán học. Tuy vậy, không thể tránh khỏi thiếu sót trong quá trình diễn dịch. Trực giác cơ học là một thuộc tính cơ bản của trí tuệ con người, cũng cơ bản như khả năng tưởng tượng hình học, không sử dụng chúng là lãng phí một năng lực mạnh mẽ mà ta có. Cơ học là hình học với điểm nhấn vào chuyển động và tiếp xúc. Ở hai khía cạnh sau, cơ học cho ta một chiều kích cảm nhận bổ sung, cho phép ta quan sát toán học từ một góc độ khác, như được miêu tả trong cuốn sách này.

Quy luật tiến hóa đáng buồn vẫn đang tồn tại. Khả năng lập luận bằng vật lý đã là khởi nguồn cho những phát kiến toán học nền tảng, từ Archimedes, đến Riemann, đến Poincaré, và đến tận hôm nay. Tuy vậy, khi một chủ thể phát triển, khả năng lý giải tự nghiệm bị chìm vào quên lãng. Kết quả

là sinh viên thường không có được nền tảng trực quan của các môn học mà họ theo đuổi.

Đối tượng của cuốn sách. Nếu bạn có hứng thú với toán học và vật lý, tôi hy vọng bạn sẽ không quẳng cuốn sách này đi.

Cuốn sách này có thể thú vị với những ai xem những điều sau đây là kỳ thú:

- Định lý Pythagoras có thể được giải thích bằng định luật bảo toàn năng lượng.
- Đóng mở công tắc trong một mạch điện đơn giản chứng minh được bất đẳng thức $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b)$.
- Một số bài toán giải tích* phức tạp có thể được giải quyết dễ dàng mà không cần một phép tính nào.
- Khảo sát chuyển động của bánh xe đạp để chứng minh được công thức Gauss-Bonnet (giả định là không đòi hỏi người đọc có sự am tường đề tài này; tất cả hiểu biết cơ bản đều được cung cấp).
- Cả công thức tích phân Riemann lẫn định lý ánh xạ Riemann (đều được giải thích ở các mục thích hợp) đều hiện rõ mồn một bằng cách quan sát chuyển động của lưu chất.

Cuốn sách này sẽ lôi cuốn bất cứ ai muốn tìm hiểu về hình học hay cơ học hoặc những ai không tìm thấy hứng thú với toán học bởi vì họ cho rằng nó quá khô khan hay nhàm chán.

---

* Nguyên văn: calculus vừa có nghĩa là giải tích, vừa có nghĩa là phép tính – N.D.

Sử dụng trong khóa học. Ngoài việc là món ăn tinh thần bổ dưỡng, cuốn sách còn có thể được dùng như một tài liệu bổ sung trong các khóa học về giải tích, hình học và bồi dưỡng giáo viên. Giáo sư toán và vật lý có thể tìm thấy một vài bài toán và nhận xét có ích cho công tác giảng dạy của họ.

Kiến thức nền tảng cần có. Phần lớn cuốn sách (các chương 2 đến chương 5) chỉ đòi hỏi giải tích và hình học sơ cấp với độ khó được giữ ổn định suốt các chương này, với một vài đột biến ngoại lệ. Chương 6 và 7 chỉ yêu cầu người đọc biết sơ qua đạo hàm và tích phân. Cuối chương 7 tôi có đề cập suất tiêu tán, nhưng không đòi hỏi những hiểu biết sâu sắc. Chương này bất cứ ai đã làm quen với giải tích sơ cấp cũng có thể tiếp cận được.

Phần thứ hai (các chương 6 đến chương 11) có dùng (dù hiếm khi) một vài khái niệm về giải tích đa biến, nhưng tôi tránh dùng nhiều thuật ngữ, hy vọng rằng trực giác sẽ giúp bạn đọc vượt qua được các rào cản kỹ thuật.

Tất cả mọi điều một người cần biết về vật lý được mô tả trong phụ lục; nó được trình bày để phục vụ những người thiếu kiến thức nền tảng.

Ta có thể đọc sách từng phần một hay từng bài toán một; nếu bị mắc kẹt, bạn chỉ cần lật sang trang khác để có thêm hứng thú. Có ngoại lệ cho cấu trúc mỗi chủ đề một trang này, chủ yếu xuất hiện ở những chương cuối.

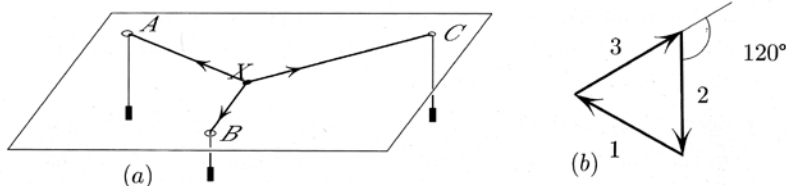
Nguồn tài liệu. Theo như tôi biết khá nhiều, tuy không phải toàn bộ, các lời giải trong sách này là mới. Chúng bao gồm lời giải cho các bài toán 2.6, 2.9, 2.10, 2.11, 2.13, 3.3, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10, 3.11, 3.12, 3.17, 3.18, 3.19, 3.20, 3.21, 5.2, 5.3,

6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 7.1 và 7.2. Các mô phỏng ở chương 8 và ở các mục 9.3, 9.8 và 11.8 cũng có thể là mới.

Không có nhiều tài liệu liên quan đến chủ đề của cuốn sách này. Khi tôi còn học phổ thông, một ví dụ tìm thấy trong cuốn sách của Uspenski đã gây ấn tượng cho tôi đến nỗi chủ đề này đã trở thành niềm đam mê*. Thêm nhiều bài tập ở dạng đấy có thể tìm thấy trong cuốn sách nhỏ của Kogan [K], của Balk và Boltyanskii [BB], và trong chương 9 là của cuốn sách của Polga [P]. Nguồn gốc của những bài toán này cũng như lời giải của nó là công trình có từ 24 thế kỷ trước của Archimedes [ARC].

1.3 Một ví dụ cách giải vật lý so với cách giải toán học

Bài toán. Cho ba điểm A, B, C trên mặt phẳng, tìm điểm X sao cho tổng các khoảng cách $XA + XB + XC$ là nhỏ nhất.



Hình 1.1. Nếu tổng khoảng cách $XA + XB + XC$ là nhỏ nhất thì các góc tại X là 120^0.

* Đây là ví dụ đầu tiên của cuốn sách này. Ở mục 2.2, bài báo của Tokieda [TO] cùng với ví dụ này là vài ví dụ bổ sung rất tốt.

Cách tiếp cận vật lý. Ta bắt đầu bằng việc khoan ba lỗ tại A, B, C trên mặt bàn (có thể coi đây là một thí nghiệm giả tưởng hoặc nó được thực hiện ở nhà một người bạn với mục đích tiết kiệm chi phí). Sau khi cột ba sợi dây lại với nhau, gọi đó là điểm chung *X*, tôi luồn từng sợi một xuyên qua mỗi lỗ khác nhau và treo vào các quả nặng phía dưới bàn, như hình 1.1. Giả sử trọng lượng của mỗi quả nặng bằng 1; thế năng của sợi dây thứ nhất khi đó là *AX*: thực vậy, để kéo *X* từ lỗ *A* tới vị trí hiện tại của *X* ta phải nâng quả nặng đơn vị lên một khoảng *XA*. Ta đã gán tổng khoảng cách $XA + XB + XC$ một ý nghĩa vật lý là thế năng. Bấy giờ, nếu khoảng cách/năng lượng này là cực tiểu, hệ sẽ ở trạng thái cân bằng. Khi đó, bộ ba lực căng dây tác dụng lên *X* cộng lại sẽ bằng không và do đó chúng hợp thành một tam giác (thay vì là chỉ hướng rời rạc) nếu được đặt gốc-nối-ngọn, như cho thấy trong hình 1.1(b). Tam giác này là tam giác đều bởi các quả nặng là như nhau, và do đó góc nằm giữa hướng chỉ dương của các véc tơ này là 120^0. Ta đã chỉ ra rằng $\angle AXB = \angle BXC = \angle CXA = 120^\circ$.*

Lời giải toán học. Coi **a**,**b**,**c** và **x**, lần lượt là ký hiệu của các véc tơ vị trí của các điểm *A, B, C* và *X*. Ta phải tối thiểu hóa tổng của các độ dài $S(\mathbf{x}) = |\mathbf{x} - \mathbf{a}| + |\mathbf{x} - \mathbf{b}| + |\mathbf{x} - \mathbf{c}|$**.

Để có điều đó, ta cho các đạo hàm riêng phần của S bằng không: $\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial y} = 0$, trong đó **x** = *(x,y)*, hay diễn giải cũng

* $\angle$ là ký hiệu của góc; người dịch giữ nguyên ký hiệu của nguyên bản

** Có sự nhầm lẫn trong bản in nguyên tác, theo đó tổng $S(\mathbf{x}) = |\mathbf{x} - \mathbf{a}| + |\mathbf{x} - \mathbf{a}| + |\mathbf{x} - \mathbf{a}|$. Người dịch sửa lại cho phù hợp với tổng thể bài toán. – N.D.

điều kiện trên một cách gọn gàng và hình ảnh hơn, ta cho gradient $\nabla S = \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y} \right\rangle = 0$. Bây giờ ta tính ∇S.

Ta có:

$$\frac{\partial}{\partial x}|\mathbf{x}-\mathbf{a}| = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2} = (x-a_1)/\sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2}$$

và một cách tương tự:

$$\frac{\partial}{\partial y}|\mathbf{x}-\mathbf{a}| = (y-a_2)/\sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2}\ .$$

Theo đó, $\nabla|\mathbf{x}-\mathbf{a}| = (\mathbf{x}-\mathbf{a})/|\mathbf{x}-\mathbf{a}|$ là một véc tơ đơn vị, hướng chỉ từ *A* đến *X*. Ta sẽ ký hiệu véc tơ này là $\mathbf{e}_a$. Kết quả này nhận được từ một phép tính rõ ràng nhưng ý nghĩa vật lý của nó mượn từ cách tiếp cận vật lý, đơn giản là lực mà *X* kéo căng dây. Lấy đạo hàm hai số hạng $|\mathbf{x}-\mathbf{b}|$ và $|\mathbf{x}-\mathbf{c}|$ còn lại trong tổng *S* ta thu được $\nabla S = \mathbf{e}_a + \mathbf{e}_b + \mathbf{e}_c$, trong đó $\mathbf{e}_b$ và $\mathbf{e}_c$ được định nghĩa tương tự như $\mathbf{e}_a$. Ta kết luận rằng vị trí tối ưu của *X* tương ứng $\nabla S = \mathbf{e}_a + \mathbf{e}_b + \mathbf{e}_c = \mathbf{0}$. Theo đó các véc tơ đơn vị $\mathbf{e}_a$, $\mathbf{e}_b$, $\mathbf{e}_c$ tạo thành một tam giác đều, và góc ngoài bất kỳ của tam giác đó chính là góc nằm giữa cặp véc tơ đơn vị bất kỳ, bằng 120^0.

Thật lý thú khi quan sát thấy cái khó khăn thay hình đổi dạng khi ta chuyển từ cách tiếp cận này sang cách khác. Trong lời giải toán học, công việc tập trung vào thực hiện một số thao tác dạng thức. Trong lời giải vật lý, công việc tập trung vào tạo ra một mô hình vật lý phù hợp. Cách tiếp cận này là mẫu mực cho nhiều bài toán khác trong cuốn sách.

Ưu điểm tương đối của hai phương cách tiếp cận.

Tiếp cận vật lý	Tiếp cận toán học
Ít hoặc không cần tính toán	Khả năng áp dụng tổng quát
Câu trả lời thường có tính khái niệm	Chặt chẽ
Có thể dẫn tới những khám phá mới	
Đòi hỏi hiểu biết cơ bản ít hơn	
Có thể hiểu được đối với các sinh viên giải tích sơ cấp	

Cách tiếp cận vật lý phù hợp với một số chủ đề nhất định. Chủ đề biến phức là một ví dụ minh chứng cho hiệu quả của cách tiếp cận vật lý. Một vài chủ đề có tính nền tảng như định lý Cauchy-Goursat, công thức tích phân Cauchy, và định lý ánh xạ Riemann có thể được cảm nhận một cách rất trực quan chỉ với một số hiểu biết tối thiểu về vật lý. Minh họa cho phần này là công thức Euler:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+....+\frac{1}{n^2}+...=\frac{\pi^2}{6}$$

Có một mô phỏng lý thú như sau: một lưu chất không nén được được bơm vào tâm mặt phẳng với vận tốc đầu vào là $\frac{\pi^2}{6}$ gallon/s, lưu chất này được hấp thụ hoàn toàn bởi những giếng hút đặt ở các điểm số nguyên (xem mục 11.8 về biến phức). Rất nhiều ví dụ như vậy có thể được tìm thấy trong các lĩnh vực khác của toán học, và tôi hy vọng chúng sẽ được viết ra nhiều hơn trong tương lai.

1.4 Lời cảm ơn

Cuốn sách này hẳn đã không ra đời nếu không nhờ điều cha tôi đã nói khi tôi mười sáu. Tôi cho ông xem một nghịch lý vật lý xảy đến với tôi, và ông nói: "Tại sao con không viết nó ra và khởi đầu một bộ sưu tập?". Cuốn sách này chính là phần được trích dẫn từ bộ sưu tập đó, với một vài thêm thắt.

Rất nhiều bạn bè và đồng nghiệp của tôi đã đóng góp cho cuốn sách bằng những gợi ý và lời khuyên. Tôi đặc biệt cảm ơn Andrew Balmonte, Alain Chenciner, Charles Conley, Phil Holmes, Nancy Kopell, Paul Nahin, Sergei Tabachnikov, và Tadashi Tokieda, nhờ vào sự khích lệ của họ mà bộ sưu tập đã được đẽo gọt thành một dạng chỉn chu. Bản thân tôi đặc biệt biết ơn Andy Ruina, người đã đọc bản thảo rất nhiều lần và có nhiều gợi ý lẫn chỉnh sửa. Tôi biết ơn Anna Pierrehumbert bởi vô số gợi ý của cô đã giúp cải thiện cuốn sách này, và Vickie Kearn vì sự cổ vũ của bà.

Tôi vô cùng cảm ơn sự hỗ trợ của Tổ chức Khoa học Quốc gia với Quyết định Tài trợ số 0605878.

2

ĐỊNH LÝ PYTHAGORAS

2.1 Giới thiệu

Đây có vẻ là một nhận định tầm thường đến mức không đáng bàn tới: **Khối nước tĩnh trong bể chứa nằm yên, khi không bị tác động, sẽ vẫn nằm yên.** Tôi cho rằng cái đáng để lưu tâm là nó có một hệ quả thú vị là định lý Pythagoras (tr. 27). Thêm vào đó, nó còn kéo theo cả quy tắc hàm sin (tr. 29), quy luật lực đẩy nổi Archimedes, và định lý Pythagoras cho diện tích bề mặt của hình 3 chiều (tr. 30).

Chứng minh của định lý Pythagoras, mô tả ở mục 2.2, gợi ra một chứng minh động lực học của định lý Pythagoras được mô tả ở mục 2.6. Phương cách tiếp cận dựa vào chuyển động làm cho một số chủ đề khác trở nên rất sáng sủa, bao gồm:

- Định lý cơ bản của giải tích.
- Công thức tính toán nhanh cho định thức.
- Khai triển định thức theo dòng.

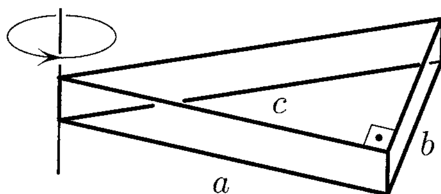
Tất cả những điều trên sẽ được mô tả trong chương này.

Vài chứng minh khác mang nhiều tính vật lý hơn chứng minh định lý Pythagoras cũng được nêu ở đây, một chứng minh sử dụng năng lượng đàn hồi, những chứng minh còn lại sử dụng động lượng.

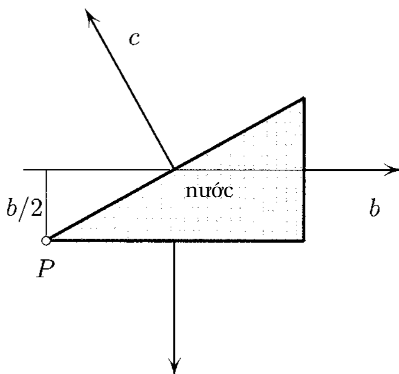
Đề tài chủ đạo của chương này là định lý Pythagoras, nhưng chúng ta sẽ đi lệch ra ngoài bài toán ở một vài đoạn ngắn.

2.2 Chứng minh "bể cá" của định lý Pythagoras

Dựng một "bể cá" hình lăng trụ nhận tam giác vuông làm đáy (hình 2.1). Ta treo bể cá lên sao cho nó có thể xoay tự do quanh một trục thẳng đứng xuyên qua một đầu cạnh huyền. Bấy giờ đổ đầy nước vào bể cá.



Hình 2.1. Bể cá đầy nước, có thể tự do chuyển động xoay quanh một trục thẳng đứng, không hề dịch chuyển.



Hình 2.2. Định lý Pythagoras tương đương với sự tiêu biến các moment quay tổng hợp đặt lên bể cá xoay quanh điểm *P*.

Nước tác động lên các mặt vách theo ba hướng giằng co như hình 2.2, mỗi lực cố xoay bể nước quanh điểm P theo ý mình. Đương nhiên, chẳng có gì xảy ra cả: bể nước không hề dịch chuyển. Nếu không thì đây sẽ là một loại động cơ không cần nhiên liệu, động cơ vĩnh cửu mà luật bảo toàn năng lượng bác bỏ.

Trong trường hợp này "động lực" là tổng của ba moment quay của các lực. Ta lưu ý* rằng moment quay của lực xung quanh điểm trục xoay P bằng với độ lớn của lực nhân với khoảng cách từ giá của lực đến điểm trục xoay. Moment quay đo cường độ lực tác dụng để làm xoay vật thể quanh điểm P.

Để cho tiện, ta coi như áp suất là 1 pound* trên một đơn vị chiều dài vách – chúng ta luôn đạt được điều này bằng cách điều chỉnh mực nước. Ba moment quay khi đó là $a, b,$ và c; các cánh tay đòn tương ứng là $a/2$ và $b/2$, và $c/2$ và điều kiện moment quay bằng không sẽ trở thành:

$$a \cdot \frac{a}{2} + b \cdot \frac{b}{2} - c \cdot \frac{c}{2} = 0\,, \qquad (2.1)$$

hay $a^2 + b^2 = c^2$, và ta có định lý Pythagoras!

Khối nước tĩnh. Lưu ý rằng chúng ta không phải dựng một cái bể nước, ngay cả trong thí nghiệm giả tưởng; đúng hơn, ta có thể tưởng tượng một khối nước hình lăng trụ chìm trong một khối nước lớn hơn. Định lý Pythagoras cũng được tuân thủ như trên bởi sự kiện rằng khối lăng trụ sẽ không đột nhiên xoay dưới áp suất của lưu chất bao quanh lên các

---

* Xem mục A.5 cho hiểu biết cơ bản đầy đủ.

* 1pound = 0,454 kg.

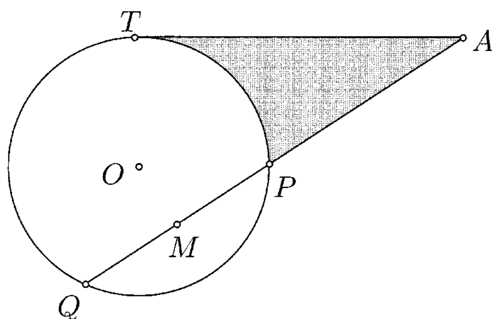
bề mặt thẳng đứng của nó. Ta kết luận định lý Pythagoras là một hệ quả của việc khối nước tĩnh luôn bất động**.

Bài tập. *Từ điểm A ngoài đường tròn vẽ tiếp tuyến AT và cát tuyến APQ như cho thấy trong hình 2.3. Chứng minh rằng:*

$$AP \times AQ = AT^2 \tag{2.2}$$

Gợi ý: Xét phần tam giác cong tô đậm APT trong hình 2.3, ta liên tưởng một bình cứng bơm đầy gas và có thể xoay quanh O.

Như giải thích ở mục 2.3 trong một ngữ cảnh khác, (2.2) cho thấy vùng tô đậm giữ nguyên không đổi khi xoay quanh O. Tương tự, định lý Pythagoras cũng cho thấy rằng diện tích của tam giác vuông là không đổi khi tam giác xoay quanh một đầu cạnh huyền.



Hình 2.3. Chứng minh $AP \times AQ = AT^2$.

* Nguyên văn: still water remains still – N.D.

2.3 Chuyển đổi một lý lẽ vật lý sang một chứng minh nghiêm ngặt

Điểm chốt trong chứng minh "bể nước" của định lý Pythagoras là sự triệt tiêu của tổng các moment quay tổng cộng quanh điểm P (hình 2.1). Làm thế nào chúng ta tái lập ý tưởng moment quay bằng không này trong thuật ngữ toán học thuần túy mà không cần dùng đến các khái niệm vật lý? Đây là câu trả lời.

Mệnh đề *vật lý* (2.1) về tổng moment quay bằng không quanh P có thể diễn dịch sang mệnh đề *hình học:* diện tích của tam giác không đổi khi nó xoay quanh P*. Sau đây là chứng minh cho sự tương đồng ấy.

Gọi $A(\theta)$ là diện tích của tam giác xoay quanh P một góc θ. Cố nhiên, diện tích là độc lập với θ:

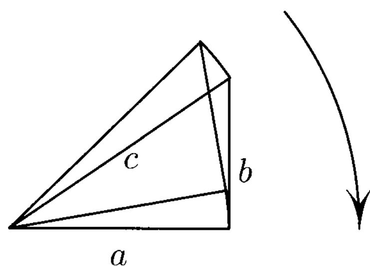
$$A'(\theta) = 0$$

và ta khẳng định rằng chính sự bất biến của diện tích này là tương đương với điều kiện moment quay bằng không (2.1). Để có sự tương đương này ta chỉ cần chỉ ra rằng:

$$A'(\theta) = a \cdot \frac{a}{2} + b \cdot \frac{b}{2} + c \cdot \frac{c}{2} \tag{2.3}$$

---

* Đây là một ví dụ về bài toán có vẻ tầm thường (diện tích của tam giác không đổi qua phép xoay) nhưng ẩn chứa một điều không hề tầm thường (định lý Pythagoras.)



Hình 2.4. Phần diện tích quét bởi hai cạnh góc vuông bằng với phần diện tích quét bởi cạnh huyền.

Để chứng minh (2.3) ta xoay tam giác một góc nhỏ $\Delta\theta$ quanh P. Cạnh a quét ngang một vùng hình quạt diện tích $\frac{1}{2}a^2\Delta\theta$, tương tự cho cạnh c. Thực tế, diện tích được quét bởi b cũng theo biểu thức như trên: $\frac{1}{2}b^2\Delta\theta$. Thực vậy, b thực hiện hai chuyển động đồng thời: (i) trượt theo phương riêng nó, không ảnh hưởng đến vận tốc quét thành diện tích, và (ii) xoay quanh điểm đầu của nó. Ta kết luận rằng diện tích quét là $\frac{1}{2}b^2\Delta\theta$. Tổng diện tích quét bởi cả ba cạnh là:

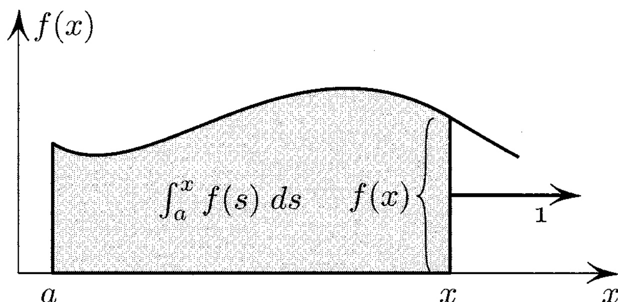
$$\Delta A = \left(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}c^2\right)\Delta\theta .$$

Ký hiệu trừ ở đây là dựa vào dữ kiện diện tích bị "mất" do cạnh huyền. Chia cho $\Delta\theta$ và lấy giới hạn khi $\Delta\theta \to 0$ ta thu được (2.3).

Sau đây là một vài ứng dụng của ý tưởng quét:

- Một chứng minh "hình vành khuyên" của định lý Pythagoras được mô tả ở mục 2.6.
- Một nhận xét về diện tích giữa hai vệt bánh của xe đạp (mục 6.1).

- Một chứng minh bằng hình vẽ của việc định thức $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ bằng diện tích hình bình hành được tạo nên bởi các véc tơ $\langle a, c\rangle$ và $\langle b, d\rangle$ (mục 2.5).
- Một chứng minh bằng hình vẽ của công thức phân rã theo dòng của định thức (mục 2.5).



Hình 2.5. Định lý cơ bản của giải tích: diện tích thay đổi ở vận tốc tương ứng với độ cao $f(x)$ của biên di động nhân cho vận tốc của nó.

2.4 Định lý cơ bản của giải tích

Ý tưởng xem xét diện tích của vùng được quét bởi một đoạn ngắn chuyển động là rất có hiệu quả. Định lý cơ bản của giải tích:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(s)ds = f(x)$$

là một ví dụ; định lý nói rằng *một đoạn ngắn di chuyển ở vận tốc đơn vị theo hướng vuông góc với chính nó, sẽ quét một vùng có diện tích biến đổi ở vận tốc bằng với độ cao của đoạn ngắn* $(f(x))$ *nhân vận tốc của nó* (1).

Ý tưởng tương tự áp dụng cho phép tích phân với cả hai

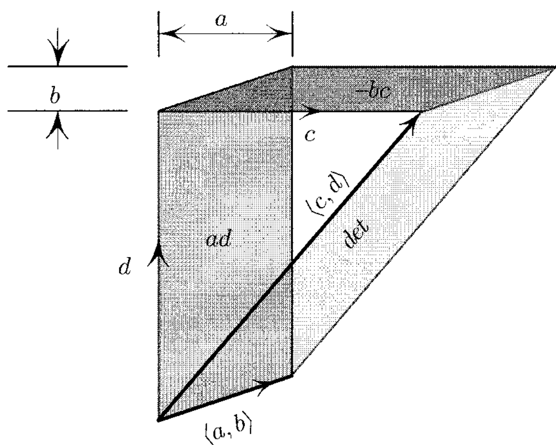
cận biến thiên, thậm chí với hàm hợp. Ví dụ, ta có thể nhận thấy ngay tức thì:

$$\frac{d}{dt}\int_{g(t)}^{b} f(s)ds = -f(g(t))g'(t)$$

bằng cách lặp lại câu in nghiêng ở trên: vận tốc thay đổi diện tích bằng với tích số của độ dài $f(g(t))$ của biên di động với vận tốc của nó $-g'(t)$. Dấu trừ là do biên chuyển động hướng vào trong: chiều dương quy ước hướng ra ngoài.

Ta còn có thể cho cận trên biến thiên theo thời gian, chứng minh công thức này sẽ là một bài tập:

$$\frac{d}{dt}\int_{g(t)}^{h(t)} f(s)ds = f(h(t))h'(t) - f(g(t))g'(t)$$



Hình 2.6. Đoạn thẳng di chuyển trong khi vẫn song song với phương ban đầu. Vùng diện tích được quét không phụ thuộc vào đường đi của đoạn thẳng.

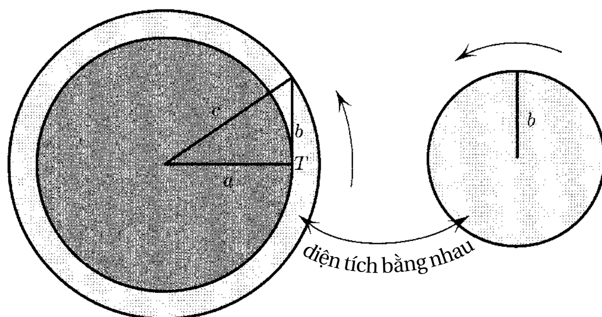
2.5 Định thức cho bởi phép quét

Theo định nghĩa, định thức $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ là vùng diện tích của hình bình hành tạo ra bởi các véc tơ $\langle a, \mathrm{b}\rangle$ và $\langle c, d\rangle$. Định nghĩa này dẫn tới một công thức tính nhanh*, cho giá trị $ad-bc$. Sau đây là một giải thích động học của công thức này của Nana Wang, sử dụng một lần nữa ý tưởng hiệu quả của phép quét.

Diện tích đang nói đến được quét bởi véc tơ $\langle a, b\rangle$ khi nó di chuyển dọc theo véc tơ còn lại $\langle c, d\rangle$. Thay vì vậy, ta hãy chuyển $\langle a, b\rangle$ thành hai chuyển động đơn giản hơn, như cho thấy trong hình 2.6. Diện tích quét trong quá trình chuyển động đầu tiên là ad, và trong quá trình chuyển động thứ hai là $-bc$; dấu trừ là do đoạn thẳng di chuyển "ra sau". Diện tích tổng cộng được quét là $ad-bc$. Vẫn có thể nhận xét được rằng vùng diện tích quét không phụ thuộc vào đường đi của véc tơ chuyển động $\langle a, b\rangle$, chừng nào nó còn chuyển động song song với chính nó. Thực vậy, vận tốc thay đổi của diện tích quét thành bằng với độ dài của đoạn thẳng nhân vận tốc theo phương vuông góc. Vì thế, chuyển dịch cụ thể như thế nào thực ra không quan trọng.

---

* Rất nhiều người (bao gồm cả tác giả) không may đã được dạy dạng sau của công thức như định nghĩa, chứ không phải ý nghĩa hình học của nó.



Hình 2.7. Chứng minh về định lý Pythagoras cho bởi phép quét.

Bài toán. *Đưa ra một lời giải thích của "phép quét" tương tự cho công thức khai triển định thức trong một dòng:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Gợi ý: Di chuyển hình bình hành Π tạo thành bởi hai dòng véc tơ cuối theo hướng trục x với a_{11}, sau đó theo trục y với a_{12}, và cuối cùng là theo hướng trục z với a_{13}. So sánh lượng quét này với lượng quét bởi π dưới sự tịnh tiến "chéo" bởi véc tơ (a_{11}, a_{12}, a_{13}).

2.6 Định lý Pythagoras có được nhờ phép quay

Hình 2.7 cho thấy một tam giác vuông thực hiện trọn một vòng quay quanh một đầu cạnh huyền của nó. Cạnh huyền và cạnh góc vuông liền kề với trục xoay quét ra những hình đĩa, trong khi cạnh góc vuông còn lại quét ra một hình vành khuyên.

Ta có:

$$\pi a^2 + \text{ (diện tích của hình vành khuyên) } = \pi c^2 .$$

Định lý Pythagoras góp phần vào việc chỉ ra rằng diện tích của hình vành khuyên là πb^2. Làm thế nào để ta chứng minh điều này một cách trực tiếp mà không cần dùng đến định lý?

Sau đây là một lý giải tự nghiệm. Hình vành khuyên được quét thành bởi một đoạn thẳng chuyển động có độ dài b khi đoạn thẳng này thực hiện đồng thời hai chuyển động: trượt (theo phương của đoạn thẳng) và xoay vòng quanh điểm mút T của nó. Quan sát cho thấy: *chuyển động trượt không ảnh hưởng đến vận tốc quét diện tích tạo thành*. Nói cách khác, bằng cách bỏ qua vận tốc trượt, và theo đó cho đoạn thẳng xoay tại chỗ xung quanh điểm mút của nó, ta không làm ảnh hưởng vận tốc đoạn thẳng quét ra vùng diện tích. Điều này giải thích vì sao diện tích hình vành khuyên bằng với diện tích của đĩa trong hình 2.7.

2.7 Nước càng sâu càng tĩnh*

Một phát biểu tưởng chừng hời hợt có thể có những hệ quả sâu sắc. Đây là một ví dụ cho phát biểu đó: “Trừ khi có những tác động từ bên ngoài, khối nước tĩnh trong bể chứa sẽ giữ nguyên trạng thái tĩnh”**. Thực ra, phát biểu hiển nhiên này kéo theo các điều kém hiển nhiên sau:

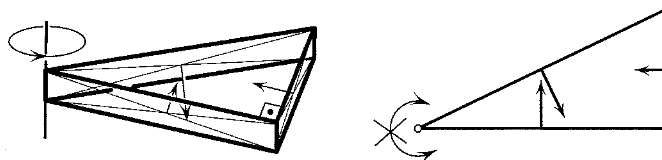
---

* Nguyên văn: Still waters run deep (nghĩa bóng của nó là "Người thâm trầm thường sâu sắc").

** Đây lại là một trường hợp đặc biệt của định luật bảo toàn năng lượng, phát biểu rằng năng lượng không thể được tạo ra. Càng phổ quát chừng nào, mệnh đề càng có vẻ đơn giản chừng ấy.

1. Định lý Pythagoras
2. Lực đẩy Archimedes
3. Định lý hàm sin

Trường hợp đầu tiên đã được giải thích một cách cơ bản bằng lập luận “bể cá” vừa rồi; thay vì bể cá ta có thể tưởng tượng ra một khối lăng trụ nước treo vào một khối nước tĩnh lớn hơn, như trong hình 2.8. Một khi khối lăng trụ ở trạng thái cân bằng, tổng moment quay (xung quanh cạnh thẳng đứng bất kỳ) của các áp suất bên trong lên các bề mặt thẳng đứng là bằng không. Điều kiện moment quay bằng không này là tương tự như (2.1), như một dấu hiệu, giống như định lý Pythagoras.



Hình 2.8. Tổng moment quay trên khối nước lăng trụ giả tưởng là bằng không.

Định luật Archimedes. Điều này có thể được chứng minh dễ dàng như sau. Định luật phát biểu rằng: *lực đẩy tác dụng vào một vật chìm (như viên đá) bằng với trọng lượng nước bị vật chiếm chỗ.*

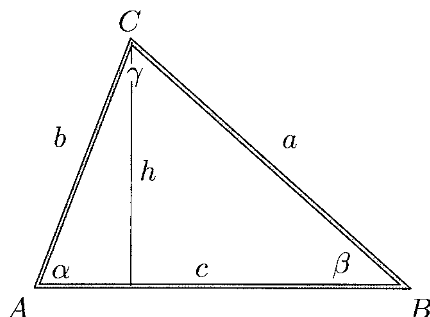
Chứng minh. Hình dung thay viên đá chìm bằng một khối nước có hình dạng giống hệt. Khối nước này sẽ lơ lửng ở trạng thái cân bằng, như đề cập ở trên. Lực đẩy nổi tác dụng lên khối nước do đó bằng với trọng lượng của khối nước. Nhưng viên đá cũng “cảm nhận” lực đẩy nổi giống vậy bởi nó có cùng hình dạng như khối nước.

Định lý hàm sin. Định lý này phát biểu rằng trong tam giác bất kỳ, độ dài của mỗi cạnh tỉ lệ với hàm sin của góc đối diện:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Chứng minh. Để chứng minh định lý ta dùng cách sử dụng thủy tĩnh, tưởng tượng một ống mỏng dài vô hạn có dạng ΔABC, đổ đầy nước, được đặt trên một mặt phẳng thẳng đứng (hình 2.9). Hoặc ta có thể chỉ tưởng tượng một ống nước hình tam giác được tách riêng ra khỏi khối nước bao quanh.

Ta hãy đặt cạnh AB nằm ngang; áp suất tại A và B khi đó là bằng nhau, và $p_A - p_C = p_B - p_C$. Nhưng chênh lệch áp suất tỉ lệ thuận với chênh lệch độ sâu: $p_A - p_C = kb\sin\alpha$ và $p_B - p_C = ka\sin\beta$ trong đó k là hệ số tỉ lệ. Ta kết luận rằng $b\sin\alpha = a\sin\beta$. Một lập luận tương tự chỉ ra rằng $c\sin\beta = b\sin\gamma$. Suy ra định lý hàm sin.



Hình 2.9. Ống nước mỏng hình tam giác sử dụng trong chứng minh của định lý hàm sin.

2.8 Định lý Pythagoras ba chiều

Định lý. *Đối với một tứ diện được giới hạn bởi ba mặt phẳng trực giao và một mặt phẳng thứ tư không song song với bất kỳ mặt phẳng nào trong số ba mặt phẳng kể trên, ta có:*

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2, \qquad (2.4)$$

trong đó a, b, và c là các diện tích bề mặt của ba mặt trực giao, và d là diện tích của mặt còn lại.

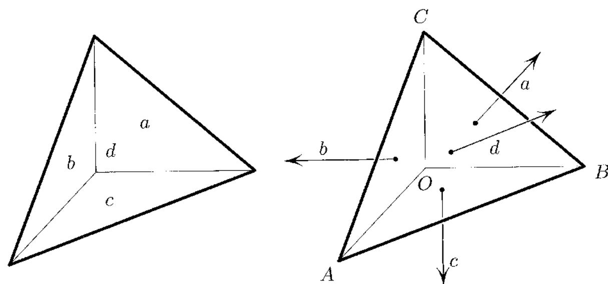
Một chứng minh vật lý. Bơm khí nén vào tứ diện. Tổng tất cả áp lực bên trong tác dụng lên hình chóp bằng không:

$$\mathbf{F}_a + \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_c = -\mathbf{F}_d, \qquad (2.5)$$

nếu không thì bể chứa của chúng ta sẽ tăng tốc bất thình lình theo hướng của hợp lực, đem lại một nguồn năng lượng tự do dẫn đến mâu thuẫn với định luật bảo toàn năng lượng – định luật được đảm bảo tuân thủ 100% với kiến thức của chúng ta cho tới giờ.

Bởi $(\mathbf{F}_a + \mathbf{F}_b) \perp \mathbf{F}_c$, định lý Pythagoras cho:

$$\left|\mathbf{F}_a + \mathbf{F}_b\right|^2 + \left|\mathbf{F}_c\right|^2 = \left|\mathbf{F}_d\right|^2.$$



Hình 2.10. Phiên bản ba chiều của định lý Pythagoras: diện tích thỏa mãn (2.4).

Tương tự:

$$\left|\mathbf{F}_a + \mathbf{F}_b\right|^2 = \left|\mathbf{F}_a\right|^2 + \left|\mathbf{F}_b\right|^2.$$

Ta kết luận:

$$\left|\mathbf{F}_a\right|^2 + \left|\mathbf{F}_b\right|^2 + \left|\mathbf{F}_c\right|^2 = \left|\mathbf{F}_d\right|^2. \tag{2.6}$$

Bấy giờ $\left|\mathbf{F}_a\right|$ = áp lực × diện tích = pa; tương tự, $\left|\mathbf{F}_b\right| = pb$, $\left|\mathbf{F}_c\right| = pc$, và $\left|\mathbf{F}_d\right| = pd$. Thế vào (2.6) và triệt tiêu p^2 ta được (2.4).

Tóm lại: Định lý diện tích (2.4) góp phần vào phát biểu rằng bể chứa bị nén có dạng được thể hiện ở hình 2.10 không tạo ra thúc đẩy đột ngột gây chuyển động nào! Một nhận xét vật lý đơn giản đem lại một định lý toán học gọn gàng.

"Dọn dẹp" toán học. Người hoài nghi có thể phàn nàn về sự thiếu chặt chẽ toán học trong cách đạt được (2.5). Thực thế, ta đã viện đến định luật bảo toàn năng lượng mà không phát biểu nó một cách cụ thể trong ngôn ngữ toán học. Để đáp lại, ta để ý (2.5) *tương đương với sự bất biến thể tích của hình chóp qua phép tịnh tiến.*

Thực vậy, (2.5) tương đương với phát biểu rằng với véc tơ $\mathbf{r}$ bất kỳ:

$$\mathbf{F}_a \cdot \mathbf{r} + \mathbf{F}_b \cdot \mathbf{r} + \mathbf{F}_c \cdot \mathbf{r} = -\mathbf{F}_d \cdot \mathbf{r}.$$

Nhưng số hạng $\mathbf{F}_a \cdot \mathbf{r}$ cho ta thể tích quét thành do mặt OBC khi nó bị tịnh tiến theo véc tơ $\mathbf{r}$, lập luận tương tự cho các mặt còn lại. Nói một cách ngắn gọn, phương trình sau cùng diễn tả dữ kiện rằng khi hình chóp bị tịnh tiến theo véc tơ $\mathbf{r}$, thể tích tích tụ được nhờ các mặt a,b,c bằng với thể tích mất đi qua mặt d.

Nhìn theo một cách khác, gọi $V = V(\mathbf{r}) = V(x,\ y,\ z)$ là thể tích của hình chóp bị tịnh tiến theo $\mathbf{r} = \langle x,\ y,\ z \rangle$. Dĩ nhiên, V độc lập với $\mathbf{r}$, nghĩa là, những đạo hàm riêng phần theo từng biến trong bộ ba lần lượt triệt tiêu:

$$\langle V_x,\ V_y,\ V_z \rangle \equiv \nabla V(\mathbf{r}) = \mathbf{0}.$$

Một cách vật lý học, véc tơ gradient $\nabla V(\mathbf{r})$ – véc tơ của các đạo hàm riêng – là hợp lực của áp suất bên trong của khí tại áp suất $p = 1$ lên các vách bể chứa.

2.9 Cân bằng bất ngờ

Tại sao định lý Pythagoras có quá nhiều chứng minh khác nhau vậy? Có lẽ bởi vì nó quá cơ bản. Thậm chí khi ta tự giới hạn trong các chứng minh vật lý, hay các chứng minh được truyền cảm hứng bởi vật lý, vẫn còn một số không ít; một chứng minh như vậy đã được trình bày ở mục 2.2, còn thêm hai chứng minh khác cũng được trình bày sau. Để chuẩn bị cho một trong những chứng minh này, trước tiên ta xem xét một cơ chế đơn giản nhưng có giá trị độc lập. Trong mục tiếp theo ta sẽ sử dụng cơ chế này để chứng minh định lý Pythagoras (thêm lần nữa!)

Bài toán[*]**.** Một hình vành khuyên C nhỏ trượt không ma sát trên một cung bán nguyệt rắn. Hai lò xo[**] đàn hồi chặt

---

* Tôi đã tình cờ nhận ra vấn đề này khi suy nghĩ về chuyển động của một vệ tinh nhân tạo lớn.

** Theo định nghĩa, sức căng của một lò xo đàn hồi chặt biến đổi tỉ lệ thuận với độ dài của nó. Cụ thể, sức căng bằng không tương ứng với độ dài bằng không. Thế năng của loại lò xo như vậy là tỉ lệ với bình phương độ dài của nó (xem mục A.1).

giống nhau CA và CB nối hình vành khuyên với hai đầu đường kính. Chứng tỏ: hình vành khuyên ở trạng thái cân bằng tại vị trí **bất kỳ** trên hình bán nguyệt.

Hình 2.11. Chứng minh cho bởi những lò xo.

Chứng minh. Hình vành khuyên ở trạng thái cân bằng khi các thành phần theo phương tiếp tuyến của tất cả lực tác dụng lên hình vành khuyên triệt tiêu lẫn nhau. Ba lực tác dụng lên hình vành khuyên: phản lực trực giao từ cung tròn và hai lực căng $\overline{CA}$ và $\overline{CB}$ (ta chọn hằng số Hooke's $k = 1$), như thể hiện trong hình 2.11. Chỉ hai lực sau có thành phần tiếp tuyến khác không, và ta phải chỉ ra rằng hai thành phần này triệt tiêu lẫn nhau. Để được vậy ta chỉ lưu ý rằng hình chiếu của hai tia này lên MN thỏa mãn:

$$\overline{OA}_{MN} = \overline{OB}_{MN},$$

và, bởi $OC \perp MN$, những tia này có cùng hình chiếu với hai lực:

$$\overline{OA}_{MN} = \overline{CA}_{MN}, \ \overline{OB}_{MN} = \overline{CB}_{MN}.$$

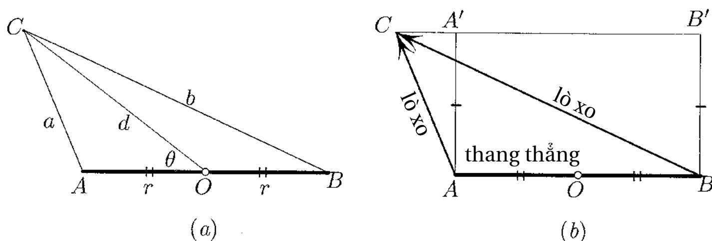
Các hình chiếu của hai lực CA và CB triệt tiêu nên hình vành khuyên là cân bằng (tại vị trí bất kỳ).

2.10 Chứng minh định lý Pythagoras bằng những lò xo

Chỉ cần chỉ ra rằng hình vành khuyên trong hình 2.11 ở trạng thái cân bằng, là chúng ta đã chứng minh được định lý Pythagoras. Thực vậy, một khi hình vành khuyên là cân bằng tại mọi điểm C bất kỳ trên cung tròn, nó không nhận lực, và theo đó không sinh công, để trượt từ C đến A. Điều này nghĩa là thế năng không thay đổi trong suốt quá trình trượt, cho nên năng lượng ban đầu bằng với năng lượng sau cùng:

$$\frac{k}{2}a^2 + \frac{k}{2}b^2 = \frac{k}{2}0^2 + \frac{1}{2}c^2.$$

Ta sử dụng dữ kiện rằng thế năng của một lò xo đàn hồi chặt có chiều dài x là $\frac{k}{2}x^2$, trong đó k là hằng số, (xem mục A.1). Ta kết luận rằng $a^2 + b^2 = c^2$.



Hình 2.12. (*a*) $a^2 + b^2$ là độc lập với góc q; (b) các moment quay cân bằng, vì các thành phần của các lực vuông góc với *AB* là bằng nhau và các cánh tay đòn cũng vậy.

2.11 Thêm một bài toán hình học với lò xo

Bài toán hình vành khuyên trên cung tròn (mục 2.9) có thể được diễn dịch lại theo cách khác cũng bất ngờ không kém, ít nhất là tôi nghĩ vậy. Thiết bị ở hình 2.12 được gợi ý từ việc trượt hình vành khuyên trên ống dây được thể hiện trong hình 2.11. Khác biệt ở hình hiện tại là ta đặt C tại một vị trí cố định trên mặt phẳng, trong khi đó đoạn AB được phép xoay quanh trung điểm O của nó. Thêm vào đó, khoảng cách từ C đến O bấy giờ là tùy ý. Hai dây lò xo đàn hồi chặt AC và BC tranh nhau xoay AB theo hai hướng đối nghịch.

Bài toán A. *Chứng tỏ rằng trong cơ chế mô tả ở trên, thanh thẳng ở trạng thái cân bằng theo phương bất kỳ.*

Bài toán B. *Chứng tỏ rằng với mọi ΔABC*

$$a^2 + b^2 = 2(d^2 + r^2),$$

trong đó $r = OA = OB$ là nửa độ dài của cạnh AB và $d = OC$ (xem hình 2.12).

Lời giải. *Bài toán A.* Ta chọn hằng số Hooke $k = 1$ cho cả hai dây lò xo. Khi đó $\overline{AC}$ và $\overline{BC}$ là các lực tác dụng lên đầu A và B trong hình 2.12. Các moment quay* của hai lực này quanh trục xoay O có độ lớn bằng nhau. Thực vậy, các cánh tay đòn là bằng nhau, $OA = OB$, cũng như hai thành phần trực giao của lực, $AA' = BB'$, trong hình 2.12. Các moment quay này là đối nhau, cho nên thanh thẳng cân bằng.

---

* Hiểu biết cơ bản về moment quay xem mục A.5.

Bài toán B. Bởi thanh thẳng cân bằng phiếm định*,ta không cần tốn công để xoay thanh thẳng hướng về điểm C. Điều này có nghĩa là thế năng của thanh thẳng ở vị trí bất kỳ luôn bằng với thế năng ở vị trí đặc biệt này:

$$\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 = \frac{1}{2}(d-r)^2 + \frac{1}{2}(d+r)^2$$

hay

$$a^2 + b^2 = 2(d^2 + r^2).$$

2.12 Chứng minh động năng: định lý Pythagoras trên băng

Hình dung bạn đang đứng tại góc của một "sân trượt băng" hoàn toàn không ma sát (hình 2.13). Giày trượt của bạn là hoàn toàn không ma sát. Dậm chân đẩy mình rời khỏi trục x, bạn bắt đầu trượt với vận tốc a dọc theo trục y. Động năng của bạn là $ma^2/2$. Bấy giờ dậm chân đẩy mình rời khỏi trục y, đạt được vận tốc b theo phương x, theo đó thu được thêm động năng là $mb^2/2$ (khi dậm chân, ma sát với trục y coi như là bằng không). Động năng của bạn sau hai cú dậm đẩy này là** $\frac{ma^2}{2}+\frac{mb^2}{2}$. Mặt khác, vận tốc cuối cùng của bạn là cạnh huyền c của tam giác vận tốc, và động lượng của bạn được cho bằng $\frac{mc^2}{2}$. Theo đó:

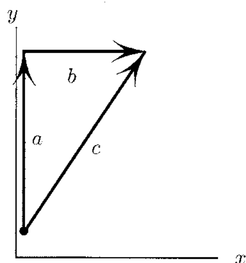
$$\frac{ma^2}{2} + \frac{mb^2}{2} = \frac{mc^2}{2},$$

---

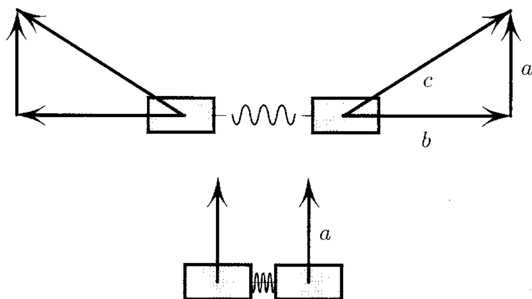
* Ta nói rằng một cân bằng là *phiếm định* nếu trạng thái cân bằng đạt được tại mọi ví trí bất kỳ.

** Động năng là một đại lượng vô hướng và cộng được với nhau theo *số học*.

hay $a^2 + b^2 = c^2$.



Hình 2.13. Động năng sau hai cú dậm đẩy liên tiếp: $\frac{ma^2}{2} + \frac{mb^2}{2} = \frac{mc^2}{2}$.



Hình 2.14. Việc cắt đứt sợi dây làm xuất hiện vận tốc theo phương ngang b. Động lượng mc^2 có được thông qua hai phần tỉ lệ, trước tiên là ma^2 và sau đó là mb^2.

2.13 Pythagoras và Einstein?

Sau đây là chứng minh "cắt đứt sợi dây" của định lý Pythagoras. Về bản chất, nó giống với chứng minh được trình bày trước đó, chỉ là viết lại theo một dạng thức khác.

Nén một dây lò xo ở giữa hai khối nặng như nhau chặt đến nỗi nếu thả ra, mỗi khối nặng sẽ văng về một bên, với cùng vận tốc b. Sau đó ta cột hai khối nặng lại với nhau

bằng một sợi dây để giữ cho lò xo luôn bị nén, như cho thấy trong hình 2.14.

Ta hãy ném cả hệ "nén chặt" đi với vận tốc a như cho thấy trong hình 2.14*, và sau đó, một khi cả hệ đang bay, ta cắt đứt dây nối, theo đó để lò xo bị nén bung ra. Vận tốc đo được c của từng khối nặng là cạnh huyền của tam giác vận tốc với các cạnh a, b. Mặt khác, động năng của cả hai khối nặng bấy giờ là $2\times\frac{mc^2}{2}=mc^2$. Nhưng năng lượng này đạt được thông qua hai phần tỉ lệ: trước tiên, $2\times\frac{ma^2}{2}=ma^2$ từ cú đẩy ban đầu, và sau đó, $2\times\frac{mb^2}{2}=mb^2$ từ lò xo. Theo đó:

$$mc^2 = ma^2 + mb^2.$$

Triệt tiêu m cho ta định lý Pythagoras**.

---

* Ta coi như không có trọng lực.

** Chúng ta nhắc đến Einstein ở đây chính vì dữ kiện rằng hệ có năng lượng là $E = mc^2$

3
CỰC TIỂU VÀ CỰC ĐẠI

Những bài toán về giá trị lớn nhất/nhỏ nhất thường rất phù hợp với phương cách tiếp cận vật lý. Lý do có lẽ là trong thực tế nhiều hệ vật lý tự tìm được giá trị cực tiểu hay cực đại: một đồng hồ quả lắc chỉ ra vị trí cực tiểu của thế năng; tia sáng phản chiếu từ viên đá nhẵn dưới đáy suối đến võng mạc của ta chỉ ra con đường tốn ít thời gian nhất; một bong bóng xà phòng chọn hình dạng của thể tích nhỏ nhất; một sợi dây mắc thõng giữa hai đầu cố định chọn hình dáng có tâm khối thấp nhất, và cứ thế cái danh sách này kéo dài bất tận.

Đây là một mẫu chung cho việc tìm ra một cách giải vật lý. Giả sử ta phải cực tiểu hóa một hàm số. Bước chính là thiết kế một hệ thống cơ học với thế năng là hàm số biết trước. Cực tiểu của hàm số tương ứng cực tiểu của thế năng, tương ứng trạng thái cân bằng của hệ. Khi mô tả điều kiện cân bằng ta thường có một câu trả lời đẹp đẽ. Thật vậy, ta sẽ phải tạo ra một "máy tính" cơ học, nó sẽ tự giải quyết được bài toán – còn ta chỉ cần chờ mà đọc lấy câu trả lời.

Sau đây là một biểu diễn dạng biểu đồ của sự tương ứng giữa giải tích và cơ học, cho trường hợp hàm số của một biến x:

Giải tích	Diễn dịch vật lý
Hàm số $f(x)$	Thế năng $P(x)$
Đạo hàm $f'(x)$	Lực tác dụng $F(x) = -P'(x)$
$f(x)$ nhỏ nhất $\Rightarrow f'(x) = 0$	$P(x)$ là cực tiểu $\Rightarrow F(x) = 0$ (trạng thái cân bằng)

Một lưu ý về hiểu biết cơ bản. Nắm được giải tích và hình học sơ cấp là đủ để hiểu chương này. Tuy vậy, phương cách tiếp cận vật lý cho phép ta giải nhiều bài toán giải tích, và cả một vài bài toán của giải tích đa biến!

Nền tảng vật lý sử dụng trong chương này được mô tả trong phần phụ lục. Ta sử dụng những mô hình cơ học cho những đối tượng toán học. Các mô hình này bao gồm lò xo đàn hồi lý tưởng, dây, hình vành khuyên trượt, khí nén và chân không. Tất cả các đối tượng giả tưởng này được mô tả trong phụ lục ngắn, cùng với các khái niệm về cân bằng, moment quay, và trọng tâm.

Cái gì cũng có giá của nó. Lời giải của các bài toán ở đây trở nên ngắn gọn khi ta vận dụng vật lý, một dòng thay vì cả trang dài khi sử dụng giải tích. Tuy nhiên, theo định luật bảo toàn độ khó, điều này có giá của nó. Khó khăn chuyển từ việc thực hiện những thao tác số học chán ngắt sang việc thiết kế một hệ thống cơ học thích hợp.

Vài nét nổi bật. Các chủ đề của chương này gồm:

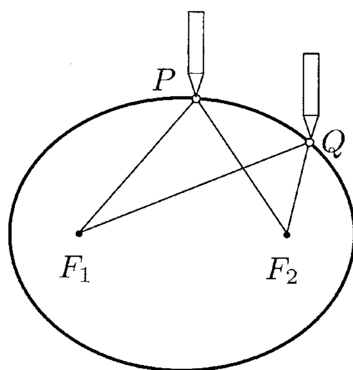
1. Một tính chất quang học của hình ellipse.
2. Đường biểu diễn phù hợp nhất bằng lò xo.

3. Hình chóp của thể tích nhỏ nhất và trọng tâm.
4. Bài toán diện tích nhỏ nhất và lớn nhất.
5. Bài toán diện tích bề mặt nhỏ nhất.
6. Chứng minh định lý góc nội tiếp sử dụng cơ học.
7. Cứu lấy một nạn nhân bị chìm bằng cách sử dụng những quả nặng.

Phần lớn, nếu không muốn nói là tất cả, chỉ là những bài tập giải tích, nhưng ở đây ta giải chúng mà không cần dùng giải tích.

3.1 Tính chất quang học của hình ellipse

Hình ellipse là một dạng của "đường tròn với hai tâm": buộc một sợi dây vào giữa hai chiếc đinh (F_1 và F_2) và di chuyển bút chì sao cho dây vẫn căng; chiếc bút chì sẽ phác ra một hình ellipse. Để cụ thể, hình ellipse bao gồm tất cả điểm mà tổng khoảng cách của mỗi một điểm tới hai điểm cho trước (gọi là tiêu điểm) là một hằng số.



Hình 3.1. Định nghĩa của hình ellipse: $PF_1 + PF_2 =$ hằng số.

Mỗi hình ellipse có tính chất đáng lưu ý: một tia sáng phát ra từ một tiêu điểm sẽ nhờ sự phản xạ từ đường ellipse đi qua tiêu điểm còn lại – điều này đúng cho hướng truyền bất kỳ của tia phát. Nhờ đó nếu chơi trò laser tag* trong một căn phòng ellipse với mặt vách phản xạ sẽ rất vui.

Hoặc bạn có thể tưởng tượng chơi ném bóng trong một căn phòng ellipse: đứng tại một tiêu điểm F_1 và ném bóng, tôi sẽ ném trúng người đứng tại tiêu điểm F_2 bất kể tôi nhắm tệ cỡ nào (coi như quả bóng nảy sao cho các góc tới và phản xạ là bằng nhau). Dĩ nhiên, nếu người tại F_2 hụp xuống, khi đó bóng sẽ bay qua F_2 và đập ngược lại tôi sau một cú bật tường.

Giải thích tính chất đáng chú ý này như thế nào? Sau đây là một phát biểu hình học cụ thể của bài toán, theo sau là giải đáp.

Bài toán. *Gọi P là một điểm trên hình ellipse với tiêu điểm F_1 và F_2, và MN là tiếp tuyến tại P, hình 3.2(a). Chứng tỏ rằng:*

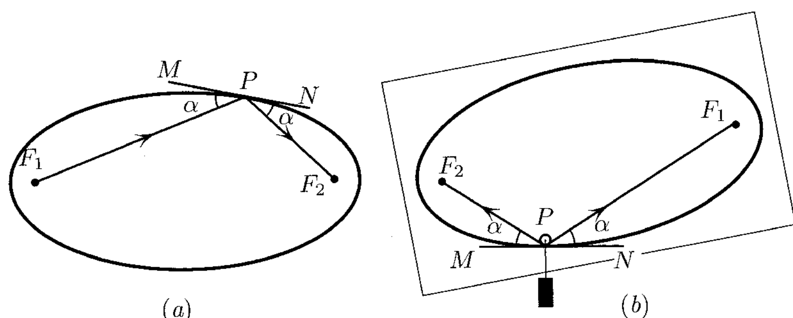
$$\angle F_1PM = \angle F_2PN .$$

Lời giải. Làm sao ta chứng minh được tính chất này? Một cách giải rất tốn sức là (i) viết phương trình của một ellipse, (ii) tính hai góc trong đề bài, và (iii) xác minh rằng các biểu thức là bằng nhau. Cách tiếp cận này có thể dẫn tới việc

---

* Laser tag là một hoạt động đội nhóm hay cá nhân mà người chơi cố ghi điểm bằng cách "bắn" trúng mục tiêu, điển hình là bằng một "súng" nhắm phát hồng ngoại cầm tay; mỗi người chơi thường đeo các mục tiêu nhạy cảm hồng ngoại để tiện cho việc tính điểm. – N.D.

tính toán “gãy cả tay” mà không hiểu thêm bao nhiêu. Thay vào đó, cách tiếp cận trực quan trình bày sau đây ngắn hơn nhiều và chỉ ra “điều gì đang xảy ra”.



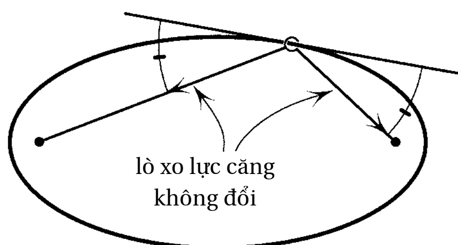
Hình 3.2. (*a*) Theo trực quan; (*b*) Theo chứng minh cơ học.

Ta treo một sợi dây vào hai chiếc đinh F_1 và F_2 được đóng vào mặt bảng (hình 3.2(*b*)), sao cho một ròng rọc nặng lăn được trên dây như trong hình. Nếu ta di chuyển ròng rọc sang trái hay phải, trong khi giữ căng sợi dây, ròng rọc sẽ phác ra một hình ellipse. Bằng cách định hướng tấm bảng thích hợp, ta có thể sắp xếp cho điểm tùy ý P trên đường ellipse là điểm thấp nhất, như trong hình 3.2(*b*), sao cho tiếp tuyến trở thành đường MN nằm ngang. Nhưng sợi dây tạo thành những góc bằng nhau với đường nằm ngang. Thực vậy, bộ ba lực tác dụng lên ròng rọc (hai lực căng và trọng lượng) là trong điều kiện cân bằng lực; cụ thể, tổng lực nằm ngang là bằng không:

$$T_1 \cos\alpha_1 - T_2 \cos\alpha_2 = 0\,,$$

trong đó T_1 và T_2 là các lực căng của hai phần sợi dây. Nhưng $T_1 = T_2$ bởi ròng rọc không ma sát*, và ta được $\alpha_1 = \alpha_2$.

Nguyên lý Heron. Nguyên lý Heron phát biểu rằng ánh sáng chọn con đường ngắn nhất. Theo định nghĩa của ellipse, mọi con đường F_1PF_2 đều cùng độ dài; nghe có vẻ ngớ ngẩn nhưng thật ra mỗi con đường như vậy là một lối đi ngắn nhất từ F_1 đến đường ellipse và đến F_2. Theo đó F_1PF_2 là đường đi của một tia nào đó. Mặt khác, ta đã chỉ ra rằng $\angle F_1PM = \angle F_2PN$. Nói cách khác, ta đã chỉ ra rằng nguyên lý Heron là nhất quán với đẳng thức giữa góc tới và góc phản xạ.



Hình 3.3. Hình vành khuyên ở trạng thái cân bằng, từ đó các góc là bằng nhau.

3.2 Một chứng minh cơ học khác

Đây là một chứng minh cơ học hơi khác của tính chất quang học trên. Khảo sát một hình vành khuyên trượt không ma sát dọc theo hình ellipse, và sử dụng hai lò xo với lực căng không đổi** $T = 1$ để neo hình vành khuyên vào mỗi

---

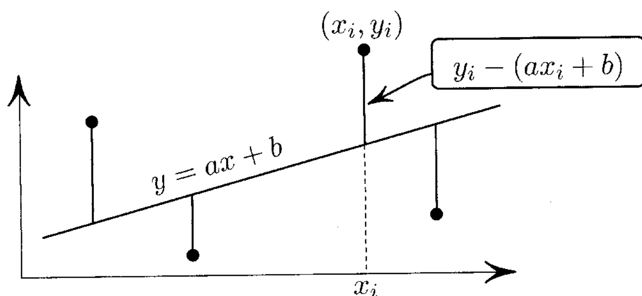
* Thực vậy, bất cứ khác biệt nào trong lực căng sẽ gây ra gia tốc góc cho ròng rọc theo hướng của lực căng lớn hơn.

** Mô tả của những khái niệm này, xem mục A.1.

tiêu điểm. Thế năng của hệ cơ học của chúng ta bằng với tổng độ dài của các dây và theo định nghĩa của ellipse thì nó là hằng số. Hình vành khuyên do vậy mà cân bằng tại bất cứ vị trí nào, và các thành phần tiếp tuyến của lực tác dụng lên hình vành khuyên cũng là trong điều kiện cân bằng lực: $T\cos\alpha_1 = T\cos\alpha_2$, kéo theo $\alpha_1 = \alpha_2$.

3.3 Hồi quy tuyến tính (phù hợp nhất) thông qua lò xo

Tưởng tượng một tập hợp các điểm dữ liệu (x_i, y_i) trong mặt phẳng. Ta được yêu cầu tìm ra một đường thẳng $y = ax + b$ phù hợp nhất với bộ dữ liệu này. "Nhất" nghĩa là gì? Để trả lời câu hỏi này, với mỗi x_i ta xem $y = ax_i + b$ như là một giá trị suy đoán, trong khi y_i là giá trị quan sát hay đo được. Độ chênh giữa bộ hai giá trị này là $y_i - (ax_i + b)$, gọi là sai số (hình 3.4). "Đường tốt nhất" ở đây nghĩa là đường có tổng bình phương sai số nhỏ nhất. Phát biểu chính xác của bài toán tìm đường phù hợp nhất, còn được gọi là bài toán *hồi quy tuyến tính*, là như sau:



Hình 3.4. Đường nào tối thiểu hóa tổng sai số (3.1)?

Bài toán. *Cho N điểm dữ liệu (x_i, y_i) trong mặt phẳng, tìm đường thẳng $y = ax + b$ phù hợp những điểm dữ liệu này nhất theo nghĩa tối thiểu hóa tổng bình phương sai số:*

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{N} (y_i - (ax_i + b))^2 . \qquad (3.1)$$

Các ẩn số trong bài toán này là độ dốc a và hệ số chắn b của đường thẳng "tốt nhất". Phương pháp tiêu chuẩn để tìm ra cực tiểu của (3.1) là cho đạo hàm riêng phần theo a và b bằng không. Sau đây là một đường tắt cơ học đi đến câu trả lời.

Lời giải. Đường thẳng cần tìm được xem như một thanh thẳng (hình 3.5). Cho thanh xuyên qua các ống bọc không ma sát trượt trên các rãnh dẫn đặt tại đường thẳng đứng $x = x_i$. Mỗi ống bao được nối bằng một lò xo đàn hồi chặt vào một cái đinh (đóng tại một điểm dữ liệu).* Ta chọn hằng số Hooke bằng 2, để cho thế năng của mỗi lò xo bằng đúng bình phương độ dài của nó. Tổng (3.1) bấy giờ mang ý nghĩa vật lý là thế năng!

---

* Hiểu biết cơ bản về lò xo đàn hồi chặt ở mục A.1. Cho mục đích của chúng ta ở đây chỉ cần nhắc lại rằng thế năng của một lò xo đàn hồi chặt của hằng số Hooke k là $\frac{k}{2}x^2$.

Hình 3.5. Tổng bình phương = thế năng (3.1) là tối thiểu khi các điều kiện cân bằng (3.2) của lực và moment quay được đáp ứng.

Nếu tổng bình phương là nhỏ nhất, thế năng hệ cơ học của chúng ta là nhỏ nhất, và thanh ở trạng thái cân bằng. Các lực còn lại mà thanh "cảm thấy" là phản lực, ngược chiều $-Fi$ từ các ống tay áo; tổng của các lực này triệt tiêu, cũng như tổng moment quay* của chúng đối với điểm chắn A:

$$\sum_{i=1}^{N} F_i = 0, \ \sum_{i=1}^{N} d_i \ F_i = 0 \ , \qquad (3.2)$$

trong đó d_i là khoảng cách từ điểm chắn đến ống tay áo. Lưu ý rằng $d_i \cos\alpha = x_i$. Bây giờ để lập biểu thức cho F_i, khảo sát điều kiện cân bằng của lực trên ống tay áo. Ống tay áo cảm nhận được (i) phản lực $-F_i$ từ thanh thẳng, (ii) lực kéo của lò xo, $y_i - (ax_i + b)$, và (iii) phản lực từ rãnh dẫn theo phương x. Chỉ hai trong số những lực này có thành phần y khác không, và chúng là cân bằng: $F_i \cos\alpha = y_i - (ax_i + b)$. Sử dụng những biểu thức này với d_i và F_i trong (3.2) ta thu được

* Cho hiểu biết cơ bản xem mục A.5 và A.6.

$$\begin{cases} \sum y - a\sum x - Nb = 0 \\ \sum xy - a\sum x^2 - b\sum x = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Đây là hệ hai phương trình với hai ẩn a và b mà khi được giải, cho ta giá trị độ dốc và hệ số chắn "tốt nhất".

Lưu ý rằng kết quả như (3.3) có thể thu được trực tiếp bằng cách cho đạo hàm riêng phần của sai số trong (3.1) bằng không:

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2\sum\left(y_i - \left(ax_i + b\right)\right) = 0$$

và

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2\sum x_i\left(y_i - \left(ax_i + b\right)\right) = 0 .$$

Tại đây ta có một diễn dịch vật lý của các điều kiện này: phương trình đầu tiên diễn tả sự tiêu biến của hợp lực trên thanh, trong khi phương trình thứ hai diễn tả sự triệt tiêu của moment quay quanh điểm chắn A.

3.4 Đa giác có diện tích nhỏ nhất

Ví dụ tiếp theo có thể tiếp cận bằng vật lý một cách hiệu quả và cho ta một cách giải gọn gàng. Bài toán này có thể đại diện cho một loạt bài toán tương tự.

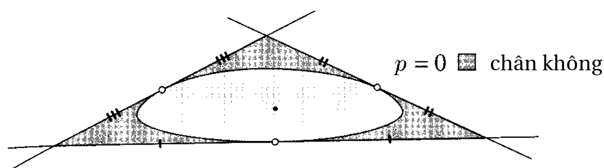
Định lý. *Khảo sát một đa giác n cạnh P có diện tích khả dĩ nhỏ nhất ngoại tiếp một đường cong* lồi kín cho trước K. Khi đó mỗi tiếp điểm của K với cạnh của P là trung điểm của cạnh đó.*

---

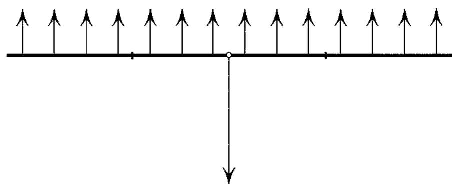
* *K* không được cho bởi một công thức – tất cả những gì ta biết rằng nó là đường cong lồi.

Chứng minh. Hình vẽ cho thấy ba đường thẳng bao quanh đường cong K, với phần chân không bên trong tam giác và với khí có áp suất $p = 1$ bên ngoài ép lên các đường thẳng (khí không thể xuyên qua). Vật cản K ngăn tam giác khỏi co lại thành một điểm. Theo cảm nhận, tam giác cố làm "điều tốt nhất có thể" cho việc co lại: nó cố tối thiểu hóa diện tích của mình. Cụ thể hơn, làm các thanh hợp thành một tam giác có diện tích nhỏ nhất A; các thanh không nối với nhau tại các đỉnh. Tôi khẳng định rằng mỗi thanh khi đó là ở trạng thái cân bằng. Thực thế, thế năng hệ của chúng ta bằng* diện tích của phần chân không nhân với áp suất p, để cho

Diện tích nhỏ nhất ≡ thế năng nhỏ nhất
≡ trạng thái cân bằng.



Hình 3.6. Bộ ba thanh thẳng bao quanh một bong bóng chân không bị ép vào trong đè lên đường cong K bởi khí bên ngoài.

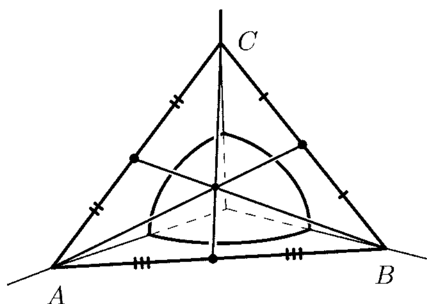


Hình 3.7. Nếu một lực phân bố đều trên một đoạn thẳng cân bằng với một lực tác dụng tại một điểm của đoạn thẳng, thì điểm đó là trung điểm.

---

* Xem lý giải ở mục A.4.

Bởi mỗi thanh ở trạng thái cân bằng, áp suất hướng ra ngoài tác dụng lên thanh tại điểm tiếp xúc cân bằng với áp suất hướng vào trong của khí. Điều này hàm ý (xem hình 3.7) rằng điểm mà áp lực tác dụng lên là trung điểm; nếu không thì moment quay của tất cả lực trên thanh quanh tiếp điểm sẽ khác không. Đơn giản mà nói, thanh ắt sẽ quay nếu điểm tiếp xúc không phải là trung điểm.



Hình 3.8. Nếu mặt phẳng tiếp xúc tối thiểu hóa thể tích của hình chóp, khi đó điểm tiếp xúc là trọng tâm của ΔABC.

3.5 Hình chóp có thể tích nhỏ nhất

Bài toán. *Trong tất cả mặt phẳng tiếp xúc mặt ellipsoid $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$, một trong số chúng giao với góc phần tám thứ nhất $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$ tạo thành hình chóp có thể tích khả dĩ nhỏ nhất. Chỉ ra rằng tiếp điểm của mặt phẳng đó là trọng tâm* của mặt ABC (hình 3.8).*

Lời giải vật lý. Ta hãy tưởng tượng mặt phẳng tiếp xúc chia tách phần chân không bên trong hình chóp với không khí

---

* Trọng tâm (hay điểm cân bằng lực) của tam giác là giao điểm của các đường trung tuyến.

bên ngoài góc phần tám thứ nhất. Không khí chỉ ép lên phần mặt phẳng nằm trong góc phần tám thứ nhất. Mặt phẳng cắt ngang mặt phẳng tọa độ không gặp sự cản trở nào, trong thí nghiệm tưởng tượng của chúng ta. Không khí đè mặt phẳng lên khối ellipsoid rắn, cố gắng "nghiền" thể tích của hình chóp tới giá trị cực tiểu. Tại giá trị thể tích nhỏ nhất, mặt phẳng sẽ ở trạng thái cân bằng – tức là, bất cứ động thái nào nhằm mở rộng cái "bong bóng" chân không cũng đòi hỏi nỗ lực. Cụ thể hơn, thế năng của hệ tỉ lệ với thể tích của phần chân không (xem mục A.4), để thể tích tối thiểu tương ứng năng lượng tối thiểu, năng lượng tối thiểu thì lại tương ứng trạng thái cân bằng cho mặt phẳng. Nhưng đây là điều kiện cân bằng lực giữa áp suất không khí phân bố đều trên ΔABC từ bên ngoài với áp lực từ khối ellipsoid này lên mặt kia. *Theo định nghĩa, điều này nghĩa là điểm tiếp xúc là trọng tâm của tam giác* ΔABC. Trọng tâm của một tam giác là điểm giao nhau của các trung tuyến của nó, như giải thích trong mục 3.15.

Chỉ để so sánh, sau đây là một cách giải thường thấy.

Lời giải giải tích (không phải để đọc mà để so sánh độ dài). Ta bắt đầu bằng mô tả thể tích của hình chóp liên hệ với tọa độ tiếp điểm (x_0, y_0, z_0). Véc tơ pháp tuyến của mặt ellipsoid tại điểm đó là:

$$\mathbf{N} = \nabla\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) = 2\left\langle \frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}, \frac{z_0}{c^2} \right\rangle,$$

và phương trình của mặt phẳng tiếp xúc là:

$$(r - r_0).\ N = 0$$

trong đó $\mathbf{r}_0 = \langle x_0,\ y_0,\ z_0 \rangle$, hay

$$\frac{(x \quad x_0)x_0}{a^2} + \frac{(y \quad y_0)y_0}{b^2} + \frac{(z \quad z_0)z_0}{c^2} = 0.$$

với $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1$, phương trình mặt phẳng tiếp xúc rút gọn thành:

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1.$$

Ta tính hệ số chắn X trên x bằng cách cho $y = z = 0$, và tương tự cho hai hệ số chắn còn lại:

$$X = \frac{a^2}{x_0},\ Y = \frac{b^2}{y_0},\ Z = \frac{c^2}{z_0} \quad .$$

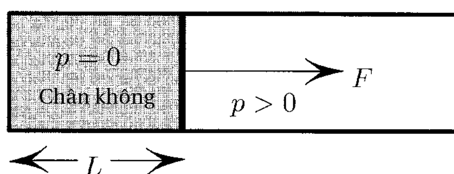
Thể tích của hình chóp bấy giờ được mô tả trong mối liên hệ với điểm tiếp xúc:

$$V = \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2}XY \quad Z = \frac{1}{6}XYZ = \frac{(abc)^2}{x_0 y_0 z_0}.$$

Ta phải tối thiểu hóa V, đó là, tối đa hóa

Ta nhận thấy các điều sau:

1. Giữ lấy piston ở trọng tâm bảo đảm rằng nó sẽ không quay, nghĩa là để di chuyển xylanh, ta chỉ cần tác dụng lực F, *không cần moment quay*. Vì vậy chỉ có lực F thực hiện công.



Hình 5.6. Thế năng của một bong bóng chân không bằng pA.

2. Lực F cần có để kéo piston chống lại áp suất môi trường p là $F = pA$, trong đó A là tiết diện piston. Thực vậy, áp suất p là áp lực trên một đơn vị diện tích, và diện tích của bề mặt piston là A của đơn vị diện tích đó.
3. Để tạo ra thể tích V của vùng chân không chống lại áp suất p, cần có công $W = pV$. Thực vậy, đối với một hình trụ thẳng, công này là $W = F \times L = pAL = pV$. Kết quả này có được bằng cách phân nhỏ hình khối chung thành nhiều hình trụ mỏng song song.

Với các nhận xét này, chứng minh của chúng ta đã gần như hoàn tất. Một mặt, công để kéo piston đi hết một vòng tròn bằng lực nhân với quãng đường chuyển dịch của điểm tác dụng lực:

$$W = F \cdot 2\pi R = pA \cdot 2\pi R,$$

trong đó R giống như trong phát biểu của định lý. Nhưng

mặt khác, theo nhận xét (3) trên đây, công được cho bằng thể tích nhân với áp suất:

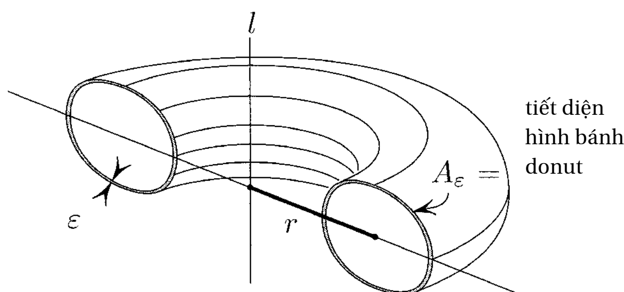
$$W = pV.$$

Đồng nhất hai biểu thức dẫn ra $pV = pA2\pi R$, nên

$$V = 2\pi RA$$

Điều này chứng minh định lý thể tích Pappus.

ĐỊNH LÝ THỂ TÍCH $\Rightarrow$ ĐỊNH LÝ DIỆN TÍCH. Hãy hình dung rằng ta phủ lấy bề mặt đang nói đến bằng một lớp sơn mỏng có độ dày ε, như trong hình 5.7.



Hình 5.7. Định lý diện tích suy ra từ định lý thể tích được áp dụng cho thể tích của một lớp bao mỏng.

Theo định lý thể tích Pappus, thể tích của lớp sơn là:

$$V_\varepsilon = 2\pi R_\varepsilon A_\varepsilon,$$

trong đó R_ε là khoảng cách từ trọng tâm của hình vành khuyên mỏng-cỡ-ε đến l, và A_ε là tiết diện hình vành khuyên. Nhưng thể tích lớp sơn V_ε là xấp xỉ diện tích nhân cho độ dày:

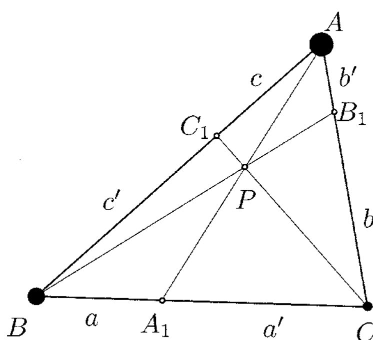
$$V_\varepsilon = S\varepsilon + ...; \tag{5.4}$$

sai số nhỏ ký hiệu bằng... là do bề mặt không phẳng. Mặt khác, trọng tâm của hình vành khuyên cỡ-ε gần như là trọng tâm của đường cong: $R_\varepsilon = r + ...$, và tiết diện hình vành khuyên $A_\varepsilon = L\varepsilon + ...$. Thế tất cả vào (5.4), chia cho ε, và cho ε tiến tới không, ta có kết quả $S = 2\pi rL$ như đã trình bày.

5.6 Định lý Ceva

Định lý Ceva và định lý đảo của nó. *Xem xét một tam giác ABC với ba điểm A_1, B_1, và C_1 nằm trên các cạnh đối diện các đỉnh tương ứng (hình 5.8). Gọi a, a', b, b', c, c' là các độ dài như được cho thấy trong hình 5.8. Định lý Ceva phát biểu rằng ba đoạn thẳng AA_1, BB_1, và CC_1 đồng quy khi và chỉ khi:*

$$abc = a'b'c'. \tag{5.5}$$

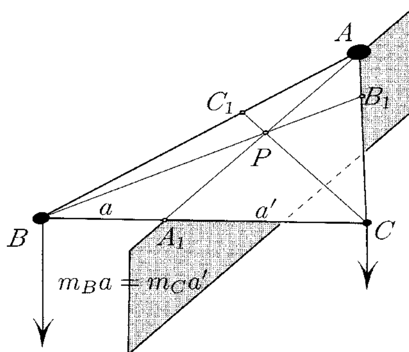


Hình 5.8. Định lý Ceva: ba đoạn thẳng Ceva AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy khi và chỉ khi $abc = a'b'c'$.

Chứng minh. Trước tiên, giả sử ba đoạn AA_1, BB_1, CC_1 có một điểm chung P. Ta hãy đặt những chất điểm m_A, m_B, và m_C tại các đỉnh của ΔABC, chọn các chất điểm này sao cho tâm khối của chúng nằm tại P. Để được như vậy, ta có thể cho $m_B = a'$ và $m_C = a$, bằng cách đó đặt tâm khối của (B, C) tại A_1. Sau đó ta chọn lấy m_A bảo đảm sao cho tâm khối của (A, A_1) là tại P; để được vậy ta làm cho m_A thỏa điều kiện cân bằng $m_A PA = (m_B + m_C)PA_1$. Tam giác của chúng ta vì thế chịu tải, sẽ cân bằng lực trên một điểm cực nhỏ đặt tại P. Khi đó chắc chắn là nó cân bằng trên đường thẳng bất kỳ trong mặt phẳng tam giác đi qua P, và cụ thể là trên đường APA_1, như hình 5.9 cho thấy.

Nhưng do m_A nằm trên đường thẳng đó, nên m_C và m_B trong điều kiện cân bằng lực, nghĩa là

$$m_B a = m_C a' . \quad (5.6)$$



Hình 5.9. Tam giác nằm cân bằng tại tâm khối P, và do đó nó nằm cân bằng lực trên bất cứ đường thẳng nào đi qua P – cụ thể, trên AA_1.

Bằng cách tương tự,

$$m_C b = m_A b',\ m_A c = m_B c'.$$

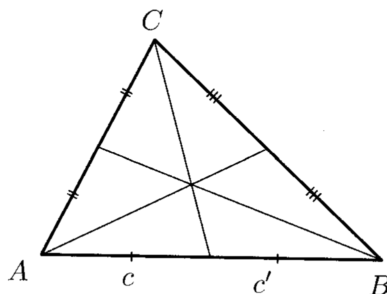
Nhân ba phương trình sau cùng ta được $abc = a'b'c'$.

Định lý đảo (rằng (5.5) kéo theo sự đồng quy) được chứng minh dễ dàng bằng phản đề như sau*. Giả sử là $abc = a'b'c'$, và chấp nhận phản-giả thuyết: một trong các đoạn thẳng có liên quan, ví dụ CC_1, không đi qua giao điểm của hai đoạn còn lại. Một đoạn CC_1 *khác* với C_1 nằm trên AB nhưng $\tilde{C}_1 \neq C_1$ có đi qua giao điểm, và đẳng thức sau cùng là: $ab\tilde{c} = a'b'\tilde{c}'$. Nhưng điều này mâu thuẫn với (5.5), bởi $\tilde{c}' / \tilde{c} \neq c' / c$. Chứng minh đến đây là hoàn tất.

5.7 Ba ứng dụng của định lý Ceva

Định lý đảo của định lý Ceva đem lại một chứng minh trực tiếp cho ba định lý sau đây.

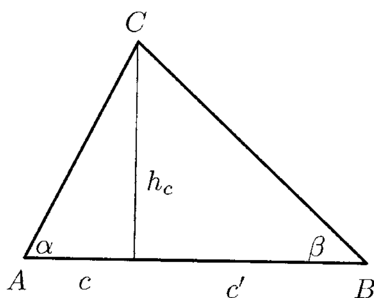
Định lý 1. *Trong tam giác bất kỳ các trung tuyến đồng quy.*



Hình 5.10. Chứng minh các trung tuyến đồng quy

---

* Ví dụ xem cuốn [CG].

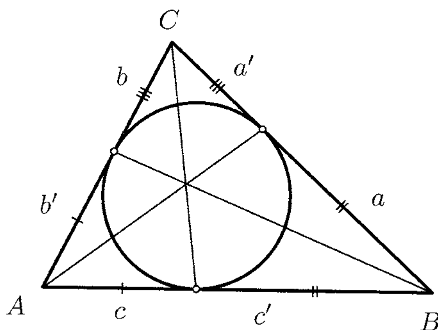


Hình 5.11. Chứng minh các đường cao đồng quy.

Chứng minh. Hệ thức Ceva (5.5) vẫn đúng cho các trung tuyến bởi $a = a', b = b', c = c'$, và do đó các trung tuyến là đồng quy theo định lý đảo của định lý Ceva.

Định lý 2. *Các đường cao trong tam giác bất kỳ đồng quy.*

Chứng minh. Trong hệ ký hiệu của hình 5.11 ta có $h_C = c\tan\alpha = c'\tan\beta$; một cách tương tự, $a\tan\beta = a'\tan\gamma$ và $b\tan\gamma = b'\tan\alpha$. Nhân và triệt tiêu số hạng giống nhau ở ba phương trình sau cùng ta được $abc = a'b'c'$. Theo định lý đảo của định lý Ceva các đường cao là đồng quy.



Hình 5.12 Các đường Ceva ứng với các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp là đồng quy.

Định lý 3. *Ba đoạn thẳng (trong hình 5.12), mỗi đường nối một đỉnh của tam giác đến tiếp điểm của đường tròn nội tiếp với cạnh đối diện, là đồng quy.*

Chứng minh. Lưu ý rằng $b' = c$, $c' = a$, $a' = b$, bởi các độ dài của những đoạn tiếp tuyến từ một điểm bên ngoài đường tròn đến đường tròn là như nhau cho cả hai tiếp tuyến. Nhân vế theo vế ta được $abc = a'b'c'$.

5.8 Bài tập

Tìm tâm khối của một dây dẫn hình bán nguyệt bằng cách giải hai bài toán nhỏ, mỗi bài có giá trị độc lập.

1. Tìm lực căng của một sợi dây hình tròn có khối lượng và bán kính cho trước, xoay tròn xung quanh tâm của nó ở vận tốc góc cho trước (hình 5.13(a)), bằng cách mường tượng một ống tuýp hình bán nguyệt (hình 5.13(b)) có nước chảy vào một đầu và thoát ra ở đầu còn lại.

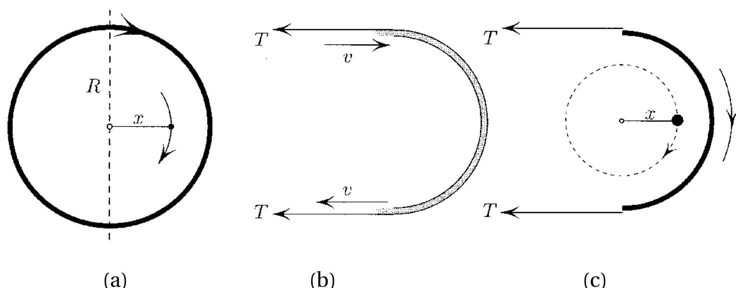
2. Sử dụng lực căng vừa tìm được để xác định tâm khối của hình bán nguyệt.

   Lời giải.

   Phần 1. Đây là một bài toán cơ bản trong cơ học, nhưng cách giải sau đây có vẻ là độc đáo. Ta hãy chỉ nhìn vào bán nguyệt bên phải của sợi dây – hình dung che nửa bên trái bằng một màn chắn sao cho ta không còn thấy nó. Bấy giờ sợi dây được "bơm vào" phía trên và thoát ra phía dưới. Điều này giống như nước chảy vào và thoát ra một ống tuýp, như được thể hiện trong hình 5.13(b). Ống tuýp phải được giữ bằng áp lực $2T$ nào đó (trong đó T là lực

căng ta đang tìm). Áp lực này làm cho nước đảo chiều, thay đổi vận tốc một lượng bằng $\upsilon-(-\upsilon)=2\upsilon$. Trong suốt thời gian Δt, một cột nước có độ dài $\Delta L=\upsilon\Delta t$ sẽ chảy vào phía trên, và cũng cột nước dài như vậy sẽ thoát ra phía dưới. Kết quả cuối cùng là độ dài ΔL của cột nước thay đổi vận tốc một lượng 2υ. Khối lượng của cột nước này là $m=\rho\Delta L=\rho\upsilon\Delta t$, trong đó ρ là mật độ dài, tức là khối lượng trên mỗi đơn vị chiều dài. Theo định luật 2 Newton $F\Delta t=m\Delta\upsilon$ ta có:

$$2T\ .\ \Delta t=m\ .\ 2\upsilon.$$



Hình 5.13. (*a*) Một sợi dây xoay vòng linh hoạt dưới tác dụng của lực căng. (*b*) Một cách để tìm ra lực căng này là hình dung nước đi vào và đi ra khỏi một ống tuýp bán nguyệt. (*c*) Sử dụng lực căng để tìm ra tâm khối.

Sau khi rút gọn theo T và thế biểu thức của m vào, Δt triệt tiêu, và ta thu được:

$$T=\rho\upsilon^2=\rho\omega^2R^2,$$

trong đó T là lực căng và ω là vận tốc góc.

Phần 2. Ta hãy tập trung chú ý vào phần vật liệu cung bán nguyệt của sợi dây. Cung tròn được giữ trong quỹ

đạo nhờ vào hai lực căng T (xem hình 5.13(a)). Lực hướng tâm $2T$ gây ra gia tốc hướng tâm của tâm khối: $M\omega^2 x = 2T$, trong đó M là khối lượng của bán nguyệt và theo đó $M = \rho\pi R$. Thế vào phương trình sau cùng ta được $\rho\pi R\omega^2 x = 2\rho\omega^2 R^2$, cho nên $x = 2R/\pi$.

3. Chứng minh rằng bốn đoạn thẳng nối từ một đỉnh của tứ diện đến trọng tâm của mặt đối diện là đồng quy. Tứ diện xem như không đều.

6

HÌNH HỌC VÀ CHUYỂN ĐỘNG

Hầu như các bài toán trong mục này dựa trên ý tưởng về chuyển động. Ý tưởng về chuyển động đã được sử dụng trước đây trong phần về định lý Pythagoras. Trong mục 2.4 ta đã chỉ ra rằng định lý cơ bản của giải tích có thể được mường tượng bằng những thuật ngữ động học. Trong mục này tôi đã tập hợp một vài bài toán khác, trong đó bài tôi thích nhất là bài toán xe đạp. Một ứng dụng tuyệt vời của ý tưởng về sự chuyển động, cho phép tìm ra diện tích dưới đường tiệm cận mà không cần một công thức nào, theo cuốn sách của R.Foote [Fo], được phát biểu ở mục 6.6 như một bài tập. Một bài tập khác ở phần cuối chương mô tả cách tính diện tích trên mặt phẳng bằng cách sử dụng một xe đẩy mua hàng. Có thể tìm thấy chi tiết về cách tiếp cận động học trong cuốn sách [LS].

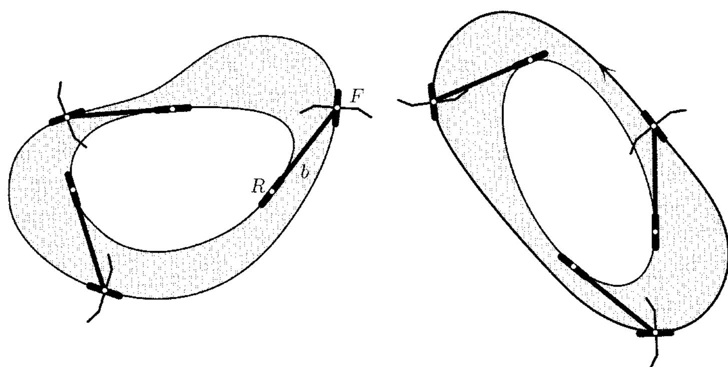
6.1 Diện tích giữa các vệt bánh xe

Bài toán. *Hình dung cưỡi một chiếc xe sao cho cả hai bánh xe vạch ra những vệt đường kín (hình 6.1). Bánh trước không*

bao giờ cán lên vệt bánh sau, để cho hình vành khuyên méo không bị thắt lại. Hãy chỉ ra rằng diện tích của hình vành khuyên này không phụ thuộc vào vệt bánh xe(!).

Diện tích là như nhau dù bạn lái xe vòng quanh bàn ăn* hay quanh một khối nhà.

Ta xem đây là một chiếc xe lý tưởng: khoảng cách b giữa các điểm tiếp xúc của các bánh xe với mặt đường là hằng số.** Ta sẽ xem b như là *đường cơ sở*. Khẳng định của bài toán hàm ý rằng hình vành khuyên có diện tích πb^2. Đây là diện tích tương tự ta sẽ có được khi giữ bánh sau cố định và cho bánh trước quay vòng.



Hình 6.1. Diện tích giữa hai vệt bánh luôn luôn là như nhau: πb^2, trong đó b là đường cơ bản của chiếc xe.

Lời giải. Sườn xe lúc nào cũng là tiếp tuyến của vệt bánh sau, như hình 6.1 minh họa. *Diện tích đang nói đến do đó được*

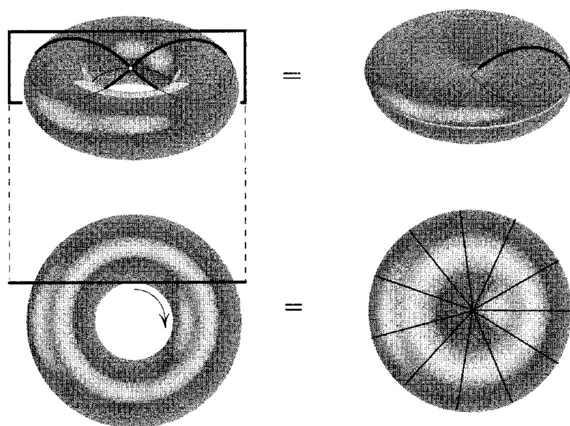
---

* Một lời khuyên tồi nhắc đến cái bàn cũng đã được đưa ra ở mục 1.3, trong đó tôi đề nghị khoan vài cái lỗ.

** Phát biểu một cách nghiêm ngặt, để điều này đúng thì phuộc trước phải thẳng đứng.

quét thành bởi một đoạn thẳng tiếp xúc với đường cong của bánh sau khi đoạn thẳng này trượt khắp lượt vòng quanh đường cong. Đoạn thẳng này có độ dài không đổi b trong suốt hành trình của nó.

Tại sao diện tích được quét thành luôn luôn như nhau? Sau đây là một lý giải tự nghiệm*. Lưu ý rằng độ tăng của diện tích được quét không phụ thuộc vào thành phần của vận tốc theo phương của đoạn thẳng. Việc đoạn thẳng có chuyển động "trượt" như thế nào không có ảnh hưởng gì. Nhưng nếu ta loại vận tốc trượt ra, đoạn thẳng sẽ chỉ đơn thuần quay quanh tiếp điểm của bánh sau R, và quét thành một hình tròn! Do đó diện tích của hình vành khuyên bằng với diện tích của hình tròn có bán kính $b = |RF|$ và bằng với đường cơ sở của chiếc xe đạp.



Hình 6.2. Hình cánh hoa trượt dọc theo đường tròn quét thành một thể tích bằng với thể tích hình cánh hoa quét thành khi nó tự quay quanh điểm thắt của nó.

---

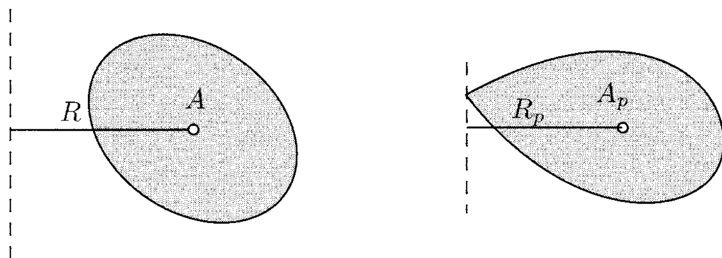
* Đây là giải thích tương tự như trong chứng minh "phép quét" của định lý Pythagoras ở mục 2.6.

6.2 Định lý thể tích bằng nhau

Đây là một định lý có dạng Pappus mà tôi đã bắt gặp khi đang suy nghĩ về bài toán xe đạp. Trực giác đằng sau bài toán này là một sự khái quát giản đơn của trực giác đằng sau bài toán xe đạp. Một khi ta biết rõ kết quả, chứng minh nó bằng giải tích là không khó. Dẫu vậy, tôi nghĩ không thể phát hiện ra nó nếu chỉ suy nghĩ trên những công thức.

Định lý. *Một khối đặc hình bánh donut được tạo thành theo cách thông thường là quay một đường cong lồi kín quanh một trục đối xứng cùng nằm trên mặt phẳng của đường cong (trục đối xứng không cắt đường cong). Bây giờ cắt bánh donut bằng một mặt phẳng song song với trục đối xứng và tiếp xúc phía trong của bánh, tạo thành một mặt "hình số tám", như trong hình 6.2.*

Ta hãy xoay hình số tám này quanh đường thẳng đi qua điểm thắt nút và song song với trục đối xứng của hình vành khuyên. Ta thu được một khối đặc mới: một cái bánh donut với hình dáng khác hẳn với một nút thắt (hình 6.2). Thể tích của cái bánh này bằng với thể tích của cái bánh ban đầu.



Hình 6.3. Mối quan hệ giữa các trọng tâm và các diện tích của hai tiết diện của một hình vành khuyên.

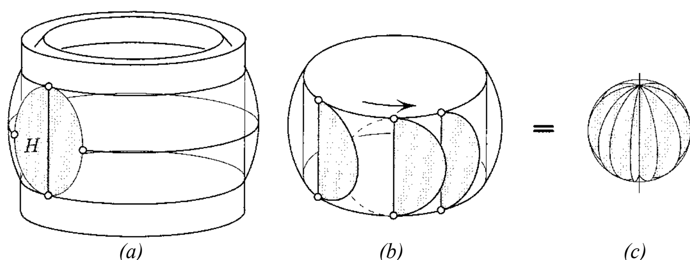
Chứng minh. Xem xét một "cánh hoa" của hình số tám. Khi cánh hoa trượt vòng quanh theo hình mũi tên ở phần bên trái của hình 6.2, nó quét thành cái bánh donut cho trước của chúng ta. Khi làm việc đó, cánh hoa thực hiện hai chuyển động đồng thời: (i) trượt trong mặt phẳng riêng nó và (ii) quay quanh đường thẳng đi qua điểm nút thắt của cánh hoa như được mô tả trong định lý. Nếu ta loại ra chuyển động trượt, ta không hề làm ảnh hưởng thể tích được quét. Khối đặc mới tạo thành có thể tích giống như khối đầu tiên.

Hệ quả. Gọi A là diện tích hình đĩa được tạo thành bằng cách cắt bánh donut với mặt phẳng chứa trục đối xứng của nó, và R là khoảng cách từ trọng tâm của hình đĩa này đến trục đối xứng, như trong định lý Pappus. Tương tự, gọi A_p là diện tích của một cánh hoa (phân nửa của hình số tám), và R_p là khoảng cách từ trọng tâm của cánh hoa đến trục như trong hình số tám, (hình 6.3). Khi đó:

$$A \times R = A_P \times R_P$$

6.3 Có bao nhiêu vàng trong một chiếc nhẫn cưới?

Dữ kiện sau đây ban đầu có thể rất khó tin. Mặc dù đã được cho biết từ trước, tôi cũng không thể giải thích *vì sao* điều này lại đúng – một tính toán quy chuẩn xem chừng không thỏa – cho tới khi bài toán "các vệt bánh xe" (bài toán 6.1) gợi ra câu trả lời.



Hình 6.4. Thể tích của hình vành khuyên phụ thuộc *chỉ* vào độ cao *H* của nó!

Định lý. *Hình 6.4 cho thấy một hình vành khuyên có bề mặt trong là mặt trụ và bề mặt láng bên ngoài là dạng cầu; tâm của mặt cầu nằm trên trục đối xứng của khối trụ. Thể tích của hình vành khuyên như vậy phụ thuộc chỉ vào độ cao* H *của nó, và bằng* $\frac{\pi}{6}H^3$.

Cụ thể, hình dung hình vành khuyên bao quanh khối cầu cỡ Trái đất có cùng thể tích như một chiếc nhẫn cưới, miễn sao hai hình vành khuyên có cùng chiều cao (coi như cả hai quả cầu và bề mặt ngoài của chiếc nhẫn cưới là dạng cầu hoàn hảo).

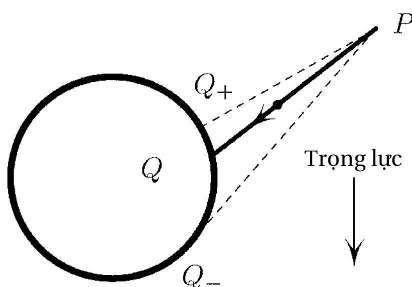
Chứng minh. Có thể chứng minh định lý này bằng tính toán. Cách lập luận "động học" sẽ tránh được việc sử dụng các công thức và làm cho nhận định trở nên hiển nhiên. Và chỉ cần hình vẽ cũng đã làm sáng tỏ hầu như toàn bộ câu chuyện.

Cụ thể như sau. Hình 6.4(a) cho thấy một mặt phẳng tiếp xúc mặt trụ phía trong. Mặt phẳng cắt khối cầu theo một hình đĩa tròn. Đường kính đĩa nằm trên một đường sinh của mặt trụ. Xét một nửa hình đĩa như được thể hiện trong hình 6.4(b). Bây giờ ta hãy cho nửa cái đĩa này trượt dọc theo bề mặt hình trụ theo hình mũi tên, giữ cho nửa cái

đĩa tiếp xúc với mặt trụ. Nửa cái đĩa chuyển động quét hết thể tích của bánh donut. Nhưng chuyển động của nửa cái đĩa bao gồm một phần "trượt" thuần túy trên mặt phẳng chứa nó – điều này không góp phần gì vào việc tạo thành thể tích – và phần quay vòng quanh đường kính. Do đó, nếu loại bỏ chuyển động "trượt", ta sẽ không làm thay đổi thể tích của phần được quét.

Mà chuyển động đã điều chỉnh của nửa cái đĩa, như trong hình 6.4(c), quét thành một trái banh có đường kính H. Thể tích của cái bánh donut vì thế bằng với thể tích của trái banh có đường kính H:

$$V = \frac{\pi}{6} H^3.$$



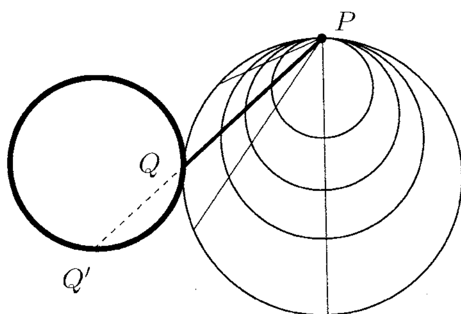
Hình 6.5. Điểm Q tối ưu phải nằm giữa Q_+ và Q_-.

6.4 Đổ dốc nhanh nhất

Bài toán. *Cho một đường tròn C và một điểm P trong mặt phẳng thẳng đứng. Cho Q là một điểm trên C, và khảo sát một viên bi trượt dọc theo đoạn PQ dưới ảnh hưởng của*

trọng lực. Viên bi xuất phát tại P với vận tốc bằng không. Với điểm Q nào thì thời gian di chuyển sẽ là nhỏ nhất?

Nhận xét. Liệu điểm Q_+, điểm gần nhất với P, có phải là câu trả lời? Không. Thực vậy, ta hãy di chuyển điểm Q theo chiều kim đồng hồ và theo dõi thời gian trượt t_{PQ} như một hàm của Q. Tại thời điểm khi Q đi qua Q_+, độ dài PQ biến đổi với vận tốc bằng không (bởi vì nó chỉ vừa dừng việc thu ngắn lại và sắp bắt đầu dài ra). Mặt khác, độ dốc của PQ dốc lên với một vận tốc dương. Tóm lại, tại thời điểm khi $Q = Q_+$, độ dài biến đổi với vận tốc bằng không, trong khi gia tốc hướng xuống của PQ tăng. Điều này nghĩa là thời gian trượt ngắn lại. Theo đó thì tốt hơn là đặt Q bên dưới Q_+. Một cách tương tự, tại thời điểm khi Q đi qua Q_- (tiếp điểm trong hình 6.5) trong chuyển động theo chiều kim đồng hồ của nó, độ dài PQ tăng thêm với vận tốc không xác định, trong khi độ dốc thay đổi với vận tốc xác định. Khi đó hẳn nhiên có lợi khi đặt Q bên trên Q_-. Điều này thu nhỏ phạm vi của điểm Q tốt nhất một chút, nhưng chính xác thì nó ở đâu?



Hình 6.6. Tại thời điểm bất kỳ $t > 0$ các viên bi hợp thành một đường tròn, nếu chúng xuất phát tại P với vận tốc ban đầu bằng không.

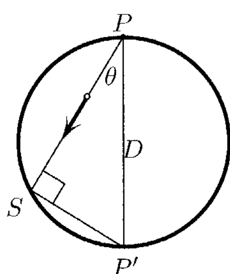
Lời giải. Xét "hình quạt nan" tạo thành bởi nhiều đường đi qua P, với một hạt cườm trên mỗi đường đặt tại P. Tại thời điểm $t = 0$ ta thả hết các hạt cườm với vận tốc đầu bằng không, và chúng bắt đầu chuyển động dưới tác động của trọng lực. Tại thời điểm $t > 0$ các hạt cườm tạo thành một đường cong nào đó như trong hình 6.6. Ta ký hiệu đường cong này bằng $F = F_t$ (ký tự F viết tắt cho "front",* như mặt đầu sóng của một đợt sóng đang lan). Khi t tăng lên, mặt bi đầu sóng sẽ chạm đường tròn tại điểm Q nào đó. Điểm tiếp xúc đầu tiên này tương ứng với thời gian đổ dốc ngắn nhất. Quả vậy, Q là điểm đầu tiên trên C nơi một hạt cườm động vào.

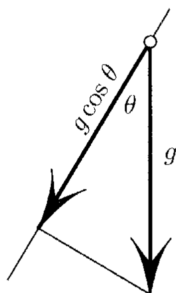
Đáng lưu ý rằng mặt đầu sóng F_t, ứng với mỗi thời điểm t, thực ra là một đường tròn như trong hình 6.6! Đường tròn này đi qua P với tiếp tuyến tại P nằm ngang; đường kính của đường tròn là $gt^2 / 2$. Bây giờ ta có thể chọn lấy một đường tròn F_t tiếp xúc C; điểm Q "tốt nhất" là tiếp điểm giữa hai đường tròn. Câu trả lời này chưa hoàn toàn rõ ràng, nhưng không khó để chỉ ra rằng Q nằm trên đường thẳng nối P với điểm thấp nhất Q' của đường tròn C.

Chứng tỏ rằng các hạt cườm hợp thành một đường tròn. Đầu tiên, nhắc lại một kiến thức hình học cơ bản. Gọi $PP' = D$ là đường kính của một đường tròn (hình 6.7), và PS là dây cung bất kỳ, với $\theta = \angle SPP'$. Khi đó

$$PS = D\cos\theta . \quad (6.1)$$

* front: phần đầu hay mặt đầu sóng – N.D.





Hình 6.7. Nếu $PS = Dcos\theta$, khi đó S nằm trên đường tròn với đường kính D = PP'.

Điều này suy ra từ dữ kiện rằng $\angle PSP' = 90^\circ$. Đảo lại vẫn đúng: quỹ tích của điểm S thỏa mãn (6.1) là một đường tròn.

Bây giờ ta hãy trở lại với các hạt cườm. Chọn một thời điểm $t > 0$ nào đó và khảo sát một hạt cườm đại diện tại thời điểm này. Gia tốc của nó là:

$$a = g\cos\theta ,$$

như trong hình 6.7(b) minh họa. Khoảng cách hạt cườm này di chuyển trong thời gian t sẽ là:

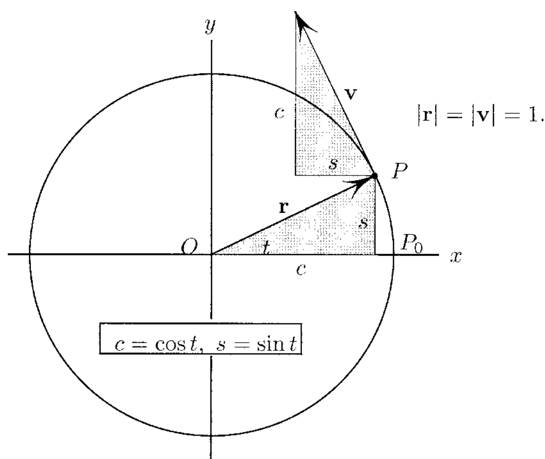
$$PS = at^2 / 2 = (gt^2 / 2)\cos\theta = D\cos\theta ,$$

trong đó $D = gt^2 / 2$ là quãng đường rơi tự do. Ta đã chỉ ra rằng tại thời điểm t, mọi hạt cườm S thỏa mãn (6.1). Theo nhận xét hình học ở trên, tất cả các hạt cườm S nằm trên đường tròn có đường kính $D = gt^2 / 2$ và có điểm trên cùng tại P, như đã khẳng định.

6.5 Tìm ra $\frac{d}{dt}\sin t$ và $\frac{d}{dt}\cos t$ bằng phép quay

Khảo sát một điểm P chuyển động trên một đường tròn đơn vị ở vận tốc đơn vị theo hướng ngược chiều kim đồng hồ, xuất phát tại điểm P_0 trên trục x tại $t = 0$. Do đó cung P_0P có độ dài t, tức là $\angle P_0OP = t$. Theo định nghĩa của hàm sin và cosin, véc tơ vị trí:

$$\overline{OP} = \langle \cos t,\ \sin t \rangle.$$



Hình 6.8.

Vận tốc được định nghĩa bằng đạo hàm của vị trí:

$$\mathbf{v} = \left\langle \frac{d}{dt}\cos t,\ \frac{d}{dt}\sin t \right\rangle.$$

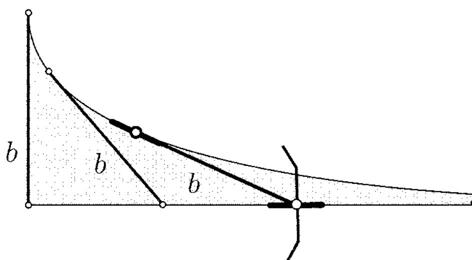
Mặt khác, bởi $|\mathbf{v}| = 1$ (giả định vậy), các tam giác vuông tô đậm trong hình 6.8 có những cạnh huyền trùng khớp (có độ

dài 1). Hơn nữa, bởi $\mathbf{v} \perp \overline{OP}$, tất cả cạnh tương ứng hai tam giác là trực giao và do đó các góc tương ứng là trùng khớp. Vì thế các tam giác tô đậm cũng trùng khớp*, và theo đó:

$$\mathbf{v} = \langle -\sin t,\ \cos t \rangle .$$

So với phương trình vừa rồi ta kết luận:

$$\frac{d}{dt}\cos t = -\sin t,\ \ \frac{d}{dt}\sin t = \cos t .$$



Hình 6.9. Diện tích dưới đường tiệm cận là bao nhiêu?

6.6 Bài tập

1. (Foote, trong cuốn [Fo]) Theo định nghĩa, đường tiệm cận là đường cong tạo thành do vệt bánh sau của chiếc

---

* Nguyên văn: congruent. Theo Euclid, ‘equal’, – bằng nhau, nghĩa là hai đối tượng có cùng kích cỡ (độ dài đối với đoạn thẳng, diện tích đối với hình phẳng). Bởi vậy, dùng ‘equal’ có thể là khá mơ hồ, trong những trường hợp cụ thể đối với các đối tượng hình học. Thế nên, ‘congruent’, trùng khớp, được dùng để diễn tả hai hình phẳng mà ta có thể chuyển dịch hình này chồng khớp lên/với hình kia, tức là chúng có cùng hình dạng và cùng kích cỡ. Một số sách giải tích khác dùng chữ ‘đồng dư’ để chỉ khái niệm này. – N.D.

xe khi bánh trước di chuyển trên một đường thẳng. Cụ thể hơn, một đường cong được gọi là một đường tiệm cận nếu ở đó tồn tại một độ dài b và một đường thẳng sao cho đoạn tiếp tuyến nào nằm giữa đường cong và đường thẳng đều có độ dài b. Trong hình 6.9 một đường tiệm cận bán-vô-cực được phác ra. Diện tích của phần vô hạn tô đậm là bao nhiêu?
Đáp án: $\frac{1}{4}\pi b^2$.

2. Trong khi chờ đợi trong một hàng tính tiền dài ở siêu thị, tôi đang lần theo đường vạch của gạch vuông lót nền với bánh trước của xe đẩy mua hàng của mình. Sau một vòng chuyển động tròn của bánh trước, các bánh sau dừng lại ở một vị trí mới. Tức là xe đẩy đã xoay quanh bánh trước một góc θ. Giá trị xấp xỉ của θ là bao nhiêu, xem như đã có tất cả thông tin cần thiết (chỉ còn thiếu câu trả lời)? Diện tích của viên gạch lót là A, khoảng cách giữa bánh trước và bánh sau là b. Cho rằng b dài hơn cạnh của viên gạch rất nhiều. Để đơn giản mọi chuyện hơn nữa, cho rằng bánh sau thẳng hàng tuyệt đối với bánh trước (ở xe đẩy thực tế không phải vậy; các bánh xe tạo thành một hình thang).
Đáp án: $\theta \approx A / b^2$. Để có nhiều thông tin hơn nữa về bài toán này, xem cuốn [Fo], [LW], và những tham khảo trong đó.

7

SỬ DỤNG CƠ HỌC ĐỂ TÍNH TÍCH PHÂN

Hai bài toán đầu tiên trong mục này có thể giải dễ dàng bằng giải tích mà không cần đến cơ học. Ở đây, ta muốn minh họa cho việc dùng "máy tính cơ học" thay cho giải tích trong một số trường hợp.

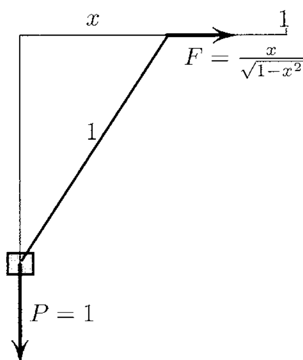
7.1 Tính tích phân $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ bằng cách nâng một quả nặng

Một quả nặng $P = 1$, được lắp lên một đường rãnh thẳng đứng không ma sát, treo vào một đầu dây có độ dài 1. Ban đầu sợi dây được kéo theo phương thẳng đứng. Khi đầu mút trên của sợi dây bị kéo ngang ra khỏi vị trí ban đầu của nó, quả nặng trượt dọc trên đường thẳng đứng. Bằng cách thay đổi độ dịch chuyển x của đầu trên của dây từ $x = 0$ đến $x = 1$, ta thực hiện công $W = \int_0^1 F(x)\,dx$, trong đó $F(x)$ là lực cần có để giữ một đầu của sợi dây tại x, như trong hình 7.1.*

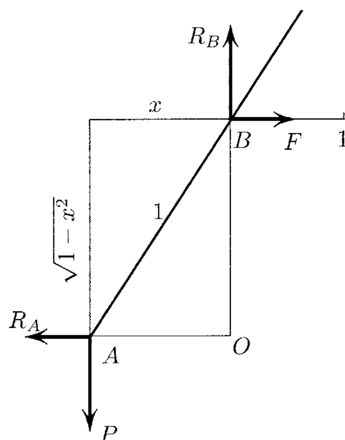
* Giá trị $x = 1$ là không thể đạt được, bởi nó đòi hỏi lực tác dụng vô cùng; khi đó ta đối mặt với một tích phân bất định.

Mặt khác một công tương tự được thực hiện khi nâng quả nặng P lên độ cao 1, sao cho $W = P \cdot 1 = 1$, và ta kết luận $\int_0^1 F(x)dx = 1$. Lúc này tôi khẳng định rằng $F(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. Gọi O là giao điểm của hai đường trực giao, như được cho thấy trong hình 7.2.

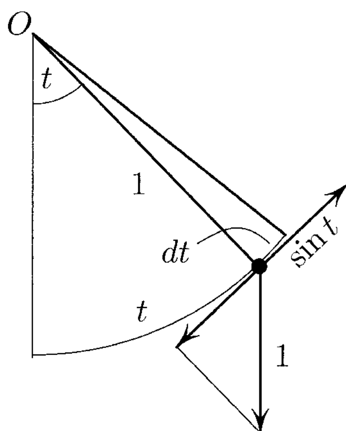
Tổng moment quay trên dây AB quanh O tiêu biến, ta được: $OB \times F = OA \times P$,



Hình 7.1. Công được thực hiện bằng cách nâng quả nặng là $\int_0^1 F(x)dx = P \cdot 1$



Hình 7.2. Các phản lực trực giao $-F$ và $-P$ có moment quay bằng không đối với O.



Hình 7.3. Công cần thiết để kéo quả nặng từ dưới cùng lên một góc x là $\int_0^x sin\ tdt$.

và bởi $OA / OB = x / \sqrt{1 - x^2}$ và $P = 1$, ta thu được $F(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, như đã khẳng định. Ta đã chỉ ra rằng:

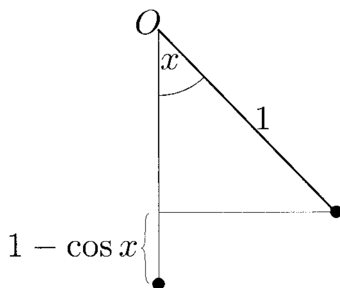
$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = 1 .$$

7.2 Tính tích phân $\int_o^x \sin t\, dt$ với một quả lắc

Khảo sát một quả lắc: một chất điểm có khối lượng $P = 1$ trên một que thẳng có độ dài 1, lắc lư quanh một khớp nối O. Lực $\sin t$ cần để giữ quả lắc ở một góc t so với phương thẳng đứng, như được thể hiện trong hình 7.3. Do bán kính thanh bằng 1, độ lớn góc t lượng định độ dài dọc theo đường tròn. Thế nên, công cần thiết để di chuyển quả nặng từ t đến $d + dt$ là $\sin tdt$, và công tổng cộng cần có để kéo quả nặng từ dưới cùng $t = 0$ lên $t = x$ là $\int_o^x \sin t\, dt$. Mặt khác, sự thay đổi trong thế năng là (khối lượng) $\times$(chiều cao) $= 1 - \cos x$

(hình 7.4). Đồng nhất hai biểu thức cho cùng một mức năng lượng sẽ cho ta:

$$\int_o^x \sin t \, dt = 1 - \cos x .$$



Hình 7.4. Thế năng của góc lệch x là $1 - \cos x$. Khối lượng là 1.

7.3 Chứng minh bằng lưu chất cho định lý Green

Thảo luận ngắn này sẽ làm cho khái niệm của toán tử phân kỳ và công thức Green

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_D div\mathbf{F} \, dA \qquad (7.1)$$

có vẻ gần như tầm thường. Thảo luận mang tính tự nghiệm này có sử dụng các khái niệm của tích vô hướng và tích phân theo đường.

Ta có (i) một trường véc tơ phẳng $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y)$ và (ii) một đường cong C bao quanh một miền phẳng D. Điểm mấu chốt ở đây là coi $\mathbf{F}$ như trường vận tốc của một khí phẳng tưởng tượng, rồi để miền D trôi theo trường vận tốc đó, và thu được một miền mới $D(t)$ tại mỗi thời điểm t với $D(0) = D$. Gọi $A(t) =$ diện tích $(D(t))$.

Chia miền D thành một số lượng lớn N của những mảnh nhỏ D_n, $1 \leq n \leq N$, ta chia nhỏ diện tích của nó:

$$A(t) = \sum A_n(t).$$

Lấy đạo hàm theo t tại $t = 0$, ta được (sử dụng ký hiệu $\dot{A} = d/dt$):

$$\dot{A}(0) = \sum \dot{A}_n(0). \qquad (7.2)$$

Nhưng mức độ vận tốc thay đổi $A_n(0)$ của diện tích mỗi mảnh nhỏ sẽ gần như tỉ lệ thuận với diện tích của nó:

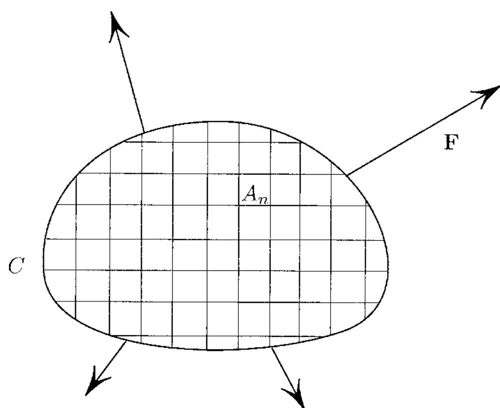
$$\dot{A}_n(0) = kA_n(0) + \varepsilon, \qquad (7.3)$$

trong đó ε là một sai số nhỏ: $\varepsilon / A_n(0) \to 0$ nếu $A_n(0) \to 0$. *Giới hạn của hệ số tỉ lệ khi miền co lại thành một điểm, được gọi là* **suất tiêu tán** *của* $\mathbf{F}$ *tại điểm đó.* Tức là ta có, được định nghĩa:

$$\text{div F (x,y)} = \lim \frac{A(0)}{A(0)},$$

trong đó giới hạn được lấy khi miền co về điểm (x, y). Hệ số k cho ta biết độ giãn ra (hay co lại) của một đơn vị diện tích, được đo tại một điểm.* Theo đó k thật ra là một đơn vị đo độ phát tán của phân tử khí.

* Dễ dàng có được công thức $F = \text{div (P,Q)} = \frac{7P}{7x} + \frac{7Q}{7y}$ từ định nghĩa này.



Hình 7.5. Miền ban đầu bị dòng F cuốn đi.

Bây giờ thế (7.3) vào (7.2) ta thu được:

$\dot{A}(0) = \sum div\mathbf{F}(x_n, y_n)A_n(0) +$ sai số bé,

trong đó (x_n, y_n) là một điểm bên trong "ô" thứ *n*. Trong giới hạn của phép chia đoạn nhỏ vô cùng ta thu được:

$$\dot{A}(0) = \iint_R div\mathbf{F}\, dA\ .$$

Vậy mức độ thay đổi diện tích của một miền di chuyển là tích phân của thành phần vuông góc với vận tốc biên của nó: $\dot{A}(0) = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds$ (ở đây n là véc tơ pháp tuyến hướng ra ngoài của C). Đây là toàn bộ phác thảo của chứng minh định lý Green (7.1).

8

PHƯƠNG TRÌNH EULER-LAGRANGE THÔNG QUA NHỮNG LÒ XO KÉO CĂNG

8.1 Vài hiểu biết cơ bản về phương trình Euler-Lagrange

Chương mục ngắn này bao gồm một diễn giải thuần túy cơ học của phiếm hàm Euler-Lagrange như thế năng của một dây lò xo giả tưởng. Diễn giải này dẫn dắt gần như thẳng đến phương trình Euler-Lagrange và đem lại một giải thích cơ học rõ ràng cho luật bảo toàn năng lượng. Ngoài ra, từng số hạng riêng biệt trong phương trình Euler-Lagrange cũng có ý nghĩa cơ học cụ thể.

Sau đây là giai đoạn giới thiệu cho người đọc chưa quen với phương trình Euler-Lagrange.

Bài toán cơ bản của phép tính biến phân là tìm ra một hàm $x(t)$ tối thiểu hóa phép tích phân.

$$\int_0^1 L(x(t),\dot{x}(t))\,dt\ , \qquad (8.1)$$

trong đó L là một hàm số cho trước với hai biến số. Giá trị biên của x được cho: $x(0) = x_0, x(1) = x_1$.

Để hiểu rõ được phần còn lại của chương, ta hãy xem qua một ví dụ: tối thiểu hóa tích phân

$$\int_0^1 \frac{\dot{x}^2}{2} dt \qquad (8.2)$$

trong điều kiện $x(0) = 0, x(1) = a$. Thay vì sử dụng lý thuyết thông thường, tôi sẽ minh họa làm thế nào cơ học giải quyết được bài toán cụ thể này. Cách tiếp cận tương tự áp dụng cho trường hợp tổng quát, sẽ được trình bày sau.

Tôi muốn biểu diễn tích phân (8.2) như là thế năng của một lò xo. Để làm thế, ta hãy hình dung một lò xo được đặt dọc theo trục x. Ta biểu diễn $x(t)$ như vị trí của một phân tử của lò xo, trong đó t là tham số gán cho các phân tử của lò xo. Ta giữ hai đầu của lò xo tại $x = 0$ và tại $x = a$: $x(0) = 0, x(1) = a$. Ta giả sử rằng lò xo đàn hồi, theo nghĩa là lực căng của lò xo được cho bởi định luật Hooke:

T (x) = dx / dt = x.

Lưu ý rằng tôi có thể làm căng lò xo ít hay nhiều tại những vị trí khác nhau, cho nên T (x(t)) = x(t) có thể biến thiên theo t. Tôi khẳng định rằng (8.2) đúng bằng thế năng của dây lò xo nói trên (trong đó từng phần tử t được giữ tại $x = x(t)$, có thể bởi lực). Tạm gác lại chứng minh, ta đã biết: nếu một hàm số cụ thể $x(\cdot)$ mang lại một cực tiểu cho (8.2), khi đó trạng thái của lò xo là cân bằng*: T = 0, hay x=0 , sao cho x là một hàm số tuyến tính; và điều kiện biên kéo theo $x = at$ như trong đáp án.

---

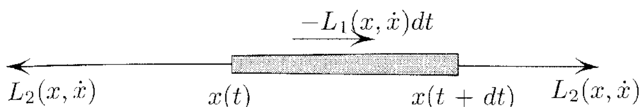
* Bởi không còn lực nào khác tác dụng lên lò xo.

Còn phải giải thích tại sao (8.2) là thế năng. Xét một phần nhỏ của lò xo tương ứng với khoảng $(t,\ t+dt)$. Ta hãy bắt đầu với một nguyên tử không bị kéo căng, rồi sau đó căng nó từ độ dài bằng không đến độ dài sau cùng $x(t+dt)-x(t)$. Khi ta kéo căng, lực thay đổi từ 0 đến $x(t)$ một cách tuyến tính với khoảng cách, vì thế ta tác động một lực trung bình là $\frac{1}{2}x$. Mặt khác, nhân nó với khoảng cách $x(t+dt)-x(t)=\dot{x}dt$, cho công tổng cộng bằng $\frac{1}{2}x^2\,dt$, như đã phát biểu!

Mặc dù Archimedes có thể đã khám phá ra cách tiếp cận được nêu ở trên, và chắc hẳn có thể đã khái quát nó, nhưng bài toán này đã không được đặt ra cho ông. Thay vào đó, Euler và Lagrange đã giải bài toán theo những phương pháp khác nhau. Họ nhận thấy rằng nếu một hàm số $x=x(t)$ đem lại một cực tiểu cho tích phân (8.1), khi đó nó phải thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(x,\dot{x})-L_x(x,\dot{x})=0\,; \tag{8.3}$$

ở đây các chỉ số ký hiệu phương của đạo hàm riêng. Lưu ý rằng trường hợp đơn giản mà chúng ta đang xét suy ra từ kết luận này. Thực thế, nếu $L = x^2/2$, khi đó $L_x = x$, $L_x=0$, và (8.3) trở thành $x=0$, như ta đã tìm ra bằng lập luận cơ học chân phương. Lập luận này có thể mở rộng ra cho trường hợp tổng quát, dẫn đến công thức (8.3) và đến diễn giải cơ học của nó.



Hình 8.1. Thế năng cân bằng các lực căng: đây là một diễn giải dạng cơ của phương trình Euler-Lagrange (8.3).

Từ thời Euler và Lagrange đến nay, cách thông thường để suy ra (8.3) là sử dụng phép tính biến phân, theo [GF]. Mục tiêu của chúng ta ở đây là chỉ ra cách tiếp cận mà Archimedes cũng có thể dùng để tìm một cách chứng minh khác, và hơn nữa, cung cấp một diễn giải cơ học cụ thể cho từng số hạng trong phương trình. Để tóm tắt, phương trình (8.3) có thể được xem như là điều kiện để một cái "slinky"* treo lơ lửng ở trạng thái cân bằng.

Tôi cần nêu rõ là các lập luận trên đây là không thực sự chặt chẽ; mục tiêu là chỉ ra rằng lý thuyết này có một diễn giải cơ học có thể cảm nhận được bằng trực quan.

8.2 Diễn giải cơ học của phương trình Euler-Lagrange

Ta hãy hình dung một cái lò xo lý tưởng, như một băng cao su nặng hay một cái slinky được xem như một đường thẳng mỏng vô hạn, được đặt dọc theo trục x. Các phân tử của lò xo được gán cho một thông số $t \in [0,1]$, sao cho $x(t)$ là tọa độ của phân tử tương ứng.

Cho t đo khối lượng của slinky, sao cho đoạn $[x(t), x(t+dt)]$ có khối lượng dt. Ta bấy giờ gán cho tích phân Euler-Lagrange (8.1) ý nghĩa của thế năng tổng cộng của lò xo.

---

* Slinky là một loại đồ chơi gồm một lò xo xoắn ốc đàn hồi và có thể nảy bật lên rồi xuống như cái yoyo. Nó có thể thực hiện một số các thủ thuật, bao gồm "bước" xuống cầu thang đầu-nối-đầu khi nó co giãn rồi tự hồi phục hình dáng với sự trợ giúp của trọng lực và đà quay của riêng nó. – N.D.

1. $L(x,0)$ là thế năng trên đường thẳng; nói cách khác, một *chất điểm* dm được đặt tại x có thế năng $L(x,0)dm$. Theo định nghĩa của thế năng, lực tương ứng tác động lên chất điểm này là

$$-L_x(x,0)dm.$$

2. Cái slinky thỏa mãn một dạng của định luật Hooke: lực căng là T (x,x) = Lx. Ví dụ như trong trường hợp quan trọng nhất của $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$ ta có T = mx tức là định luật Hooke tuyến tính. Nhưng nhìn trong trường hợp tổng quát, lực căng phụ thuộc không chỉ vào độ giãn dài x mà còn vào vị trí x.

$\int L(x,\dot{x})dt =$ **năng lượng tổng cộng của slinky.** Thực vậy, xem xét một đoạn ngắn $[x(t), x(t+dt)]$ của slinky, có khối lượng dt. Thế năng bao gồm hai phần: một là thế năng của một chất điểm dt, cho bởi $L(x(t),0)dt$, và hai là công cần thiết để kéo chất điểm dt này căng ra thành đoạn thẳng mà ta đang xét; công này được tính như sau:

$$\int_{x(t)}^{x(t+dt)} T\left(x, \frac{\sigma - x(t)}{dt}\right) d\sigma = \int_0^{\dot{x}} L_2(x,s)\,ds\,dt$$
$$= (L(x,\dot{x}) - L(x,0))dt,$$

trong đó $\frac{\sigma - x(t)}{dt} = s$. Năng lượng tổng cộng của đoạn thẳng, thế năng + kéo căng, đúng bằng L(x,x)dt . Năng lượng tổng cộng của slinky lúc này là tích phân Euler-Lagrange (8.3), như đã khẳng định.

8.3 Một cách suy ra phương trình Euler-Lagrange

Nếu một hàm số $x(t)$ tối thiểu hóa tích phân Euler-Lagrange, khi đó cái slinky tương ứng ở trạng thái cân bằng. Chênh lệch lực căng tại hai đầu của một đoạn vô cùng nhỏ khi đó là cân bằng lực với lực thế.

$$L_{\pounds}(x,\, \dot{x})\Big|_t^{t+dt} = \int_t^{t+dt} L_x(x,\, \dot{x})d\tau \,.$$

Chia cả hai vế cho dt và lấy giới hạn khi $dt \to 0$ dẫn đến phương trình Euler-Lagrange.

Tóm lại, ta đã gán cho mỗi số hạng trong phương trình Euler-Lagrange một diễn giải cơ học: $L_{\pounds}$ *là lực căng,* $\frac{d}{dt}L_{\pounds}$ *là tổng hợp của lực căng trên một đơn vị khối lượng, và* L_x *là lực thế trên một đơn vị khối lượng.*

8.4 Chứng minh định luật bảo toàn năng lượng bằng cách trượt một dây lò xo

Phương trình Euler-Lagrange (8.3) có một tính chất khó phát hiện. Đó là:

$$L - \dot{x}L_{\dot{x}} = \text{constant} \quad (8.4)$$

đối với bất cứ nghiệm $x = x(t)$ nào của phương trình Euler-Lagrange. Ý nghĩa của đại lượng* này là gì trong mô hình "slinky" của chúng ta? Câu trả lời ẩn đằng sau quan sát hiển nhiên như thế này: Do slinky là đồng đều, tức là

---

* Trong trường hợp đặc biệt khi L là chênh lệch giữa thế và động năng, $L - xL_x$ trở thành năng lượng tổng cộng, nghĩa là tổng của hai năng lượng.

mật độ năng lượng của nó L(x,x) không phụ thuộc vào *t*, nên ta biết rằng:

> *Năng lượng được chứa trong một đoạn $a \leq x \leq b$ không thay đổi nếu ta trượt cái slinky sao cho $x(t)$ di chuyển đến $x(t+c)$,* (8.5)

trong đó c là một hằng số. Bây giờ ta hãy diễn dịch phát biểu hiển nhiên (8.5) sang đẳng thức không hiển nhiên (8.4). Ta hãy trượt cái slinky sang phải với $c = dt$, bằng cách cho chất điểm dt trượt vào đoạn $[a,b]$ tại $x = a$ và kéo ra một lượng như vậy tại $x = b$. Một mặt, sự thay đổi năng lượng bên trong $[a,b]$ là bằng không theo (8.5). Mặt khác, sự thay đổi này được tạo nên từ năng lượng của khối lượng thêm vào trừ đi năng lượng của khối lượng bớt ra **và** của công thực hiện bởi các lực căng tác động lên hai đầu mút. Năng lượng thêm vào/bớt ra là:

$$Ldt\Big|_{t=t_a}^{t=t_b},$$

trong khi công được thực hiện bởi lực căng tại mỗi đầu là:

$$L_2 dx\Big|_{t=t_a} - L_2 dx\Big|_{t=t_b} = -xL_2 dt\Big|_{t=t_a}^{t=t_b}$$

Cho tổng của hai năng lượng bằng không và chia cho dt, ta có:

$$L - xL_2\Big|_{t=t_a}^{t=t_b} = 0,$$

minh chứng cho sự bất biến của năng lượng (8.4)!

9

THẤU KÍNH, KÍNH VIỄN VỌNG, VÀ CƠ HỌC HAMILTON

Trọng tâm của chương này là một dạng lập luận kiểu phẩy tay (theo nghĩa đen) ở mục 9.3. Tuy đơn giản, nó có những hệ quả khá bất ngờ trong toán học và trong quang học.* Nhờ vào diễn giải cơ học, những hệ quả này trở nên dễ tiếp cận hơn nhiều mặc dù thường thì chúng chỉ được đề cập tới trong chương trình trên đại học.

Dàn bài của chương là như sau. Mục 9.1 trình bày kiến thức cơ bản; mục 9.3 và 9.2 mô tả hệ cơ và đưa ra chứng minh cơ học cho một định lý hình học về bảo toàn diện tích. Mục 9.7 kết nối bài toán cơ/hình học với một bài toán quang học, và mục sau cùng (9.8) giải thích chức năng của kính viễn vọng và những thiết bị quang học khác thông qua "nguyên lý bất định", vốn cũng bắt nguồn từ cơ học.

Sau đây là những nét nổi bật của chương:

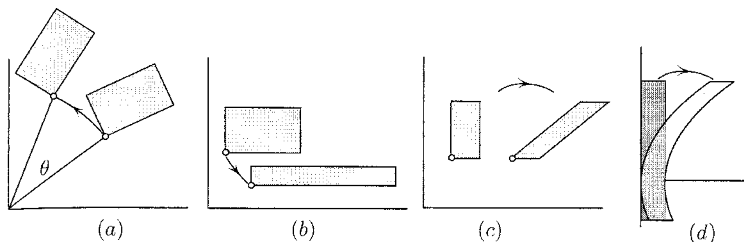
1. Phép ánh xạ bảo toàn diện tích nảy sinh một cách tự nhiên trong cơ học (mục 9.2 và 9.3).
2. Một bảng tương đồng giữa cơ học và ánh xạ bảo toàn

---

* Đây không phải là lần đầu tiên ta bắt gặp điều gì đó tầm thường lại có những hệ quả chẳng tầm thường.

diện tích (mục 9.5).

3. Nguyên lý bất định – một đối ứng cổ điển (mục 9.6).
4. Hoạt động của kính viễn vọng, thị kính, và những thiết bị quang học khác được giải thích thông qua "nguyên lý bất định" (mục 9.8).



Hình 9.1. Những ví dụ về những phép ánh xạ bảo toàn diện tích.

9.1 Phép ánh xạ bảo toàn diện tích của mặt phẳng: những ví dụ

Theo định nghĩa, một phép ánh xạ của mặt phẳng là một hàm số gán cho mỗi điểm z = (x, y) của mặt phẳng một điểm mới:

$$\phi(z) = (f(x, y), g(x, y)) \qquad (9.1)$$

Một phép ánh xạ như thế được gọi là *bảo toàn diện tích* nếu diện tích của tập hợp bất kỳ bằng với diện tích ảnh của nó qua phép ánh xạ. Những ví dụ đơn giản nhất của phép ánh xạ bảo toàn diện tích bao gồm

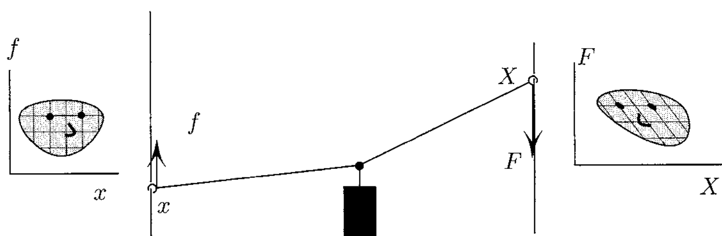
1. Phép quay: với mỗi điểm (x, y) ánh xạ gán một điểm được xoay qua một góc cho trước θ. Điểm quay này được cho

theo tọa độ ($x\cos\theta$ - $y\sin\theta$, $x\sin\theta + y\cos\theta$), như trong hình 9.1($a$).

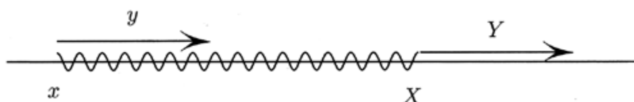
2. Phép quay hyperbol: giãn ra ở hướng này theo một hệ số không đổi λ và co lại ở hướng kia theo cùng hệ số đó; chẳng hạn, $(x,\ y) \mapsto (\lambda x,\ \lambda^{-1}y)$, như trong hình 9.1($b$).
3. Phép quay parabol $(x,\ y) \mapsto (x + ay,\ y)$, hay một ánh xạ lệch, như trong hình 9.1(c).
4. Phép trượt parabol: $(x,\ y) \mapsto (x + y^2,\ y)$, như trong hình 9.1($d$).

9.2 Cơ học và ánh xạ

Mối liên kết đáng chú ý giữa hình học và cơ học là mẫu hình lặp đi lặp lại của cuốn sách này. Tôi sẽ mô tả một khía cạnh của mối liên kết này dưới dạng đơn giản hết mức, sau khi lược bỏ hầu hết các thuật ngữ chuyên môn và các rào cản mang tính kỹ thuật. Bằng cách sử dụng cơ học, ta sẽ có được một lời giải thích tại sao kính viễn vọng, kính hiển vi, và thị kính có thể phóng to các vật thể.



Hình 9.2. Cơ học dẫn đến hình học: Hệ cơ gây ra một phép ánh xạ ψ "biến" cặp (vị trí, lực) *(x, f)* bên trái thành một cặp đồng dạng *(X, F)* bên phải.



Hình 9.3. Thế năng của một lò xo đàn hồi chặt là một hàm sinh của ánh xạ lệch.

Sau đây là mối liên hệ hình-cơ này được trình bày một cách vắn tắt. Xem xét một hệ cơ đơn giản, như là hệ trong hình 9.2.* Mỗi hình vành khuyên có thể trượt không ma sát dọc theo đường thẳng của nó. Hình dung tôi đang giữ hai vành khuyên, với mọi thứ đang ở trạng thái nghỉ. Vị trí x của hình vành khuyên bên trái và lực f kéo tay trái tôi xác định** vị trí X của hình vành khuyên bên phải và lực F làm di chuyển hình vành khuyên đó. Do đó ta có phép ánh xạ

$$\psi = (x, f) \mapsto (X, F)$$

Cái đáng chú ý là phép ánh xạ này bảo toàn diện tích, bất kể sự sắp đặt cơ học giữa hai vành khuyên có thể phức tạp đến đâu. Ta có thể thay đổi ψ bằng cách thêm vào những lò xo, những ròng rọc, thêm những quả nặng, nhưng ta không thể thay đổi tính chất về bảo toàn diện tích. (Để biết những ví dụ khác, xem hình 9.3 và 9.7).

Giải thích thực ra rất đơn giản như bạn đọc sẽ thấy trong mục kế tiếp.

* Nhiều ví dụ hơn được cho trong phần bài tập ở mục 9.9.

** Theo vài giả thuyết chuyên môn sẽ được mô tả sau.

9.3 Một "chứng minh" phẩy-tay (đúng nghĩa đen!) của bảo toàn diện tích

Sau đây là chứng minh cho việc ánh xạ ψ: $(x, f) \mapsto (X, F)$ bảo toàn diện tích. Vẫn với hình 9.2, hình dung tôi đang giữ hai hình vành khuyên sao cho hệ là bất động. Để giữ mọi thứ vẫn đứng yên tôi phải tác dụng lực *(–f)* ở tay trái và lực *(–F)* ở tay phải.

Bây giờ tới phần phẩy-tay: thật chậm rãi (để không kích thích bất cứ rung động nào) tôi di chuyển hai tay trong một điệu bộ tùy ý nhưng có tính chu kỳ, đưa hai hình vành khuyên về lại ví trí ban đầu của chúng. Cuối cùng tôi làm cho công bằng không: $\oint(-f)\,dx + \oint(-F)\,dX = 0$, hay

$$\oint f\,dx + \oint F\,dX = 0 \qquad (9.2)$$

trong đó số hạng đầu tiên là công được tay trái tôi thực hiện và số hạng thứ hai là công được tay phải tôi thực hiện. Cho đến đây, mọi thứ hoàn toàn hiển nhiên về mặt cơ học. Nhưng bây giờ ta hãy phiên dịch nó thành một phát biểu hình học. Khi tôi di chuyển hai tay, các điểm *(x, f)* và *(X, F)* lần lượt vạch ra những đường cong kín c và C. Ngoài ra, đường cong thứ hai là ảnh của đường cong đầu: $C = \psi(c)$. Nhưng lưu ý rằng hai số hạng trong phương trình (9.2) chính xác là diện tích của c và C! Công được mỗi tay tôi thực hiện có ý nghĩa hình học là diện tích! Tổng của hai diện tích bằng không; nói cách khác, ngoài sự đổi dấu, phép ánh xạ ψ bảo toàn diện tích. Sự đổi dấu này nghĩa là sự đảo hướng: ảnh của cái găng tay bên trái sẽ trông như cái găng tay bên phải.

Chỉnh sửa về hình thức. Để tránh phải đối mặt với những diện tích giá trị âm, và vì lý do lịch sử, ta hãy gọi $Y = -F$; để có ký hiệu thống nhất ta cũng đổi biến $f = y$ (hai đại lượng cùng dấu). Khi đó (9.2) trở thành:

$$\oint y\,dx = \oint Y\,dX \qquad (9.3)$$

điều mà có nghĩa rằng phép ánh xạ $\varphi = (x,\ y) \mapsto (X,\ Y)$ bảo toàn diện tích, bây giờ thì bảo toàn cả dấu [±].

Tính chất này và tính chất tương tự trong trường hợp chiều cao, xuất hiện dưới nhiều vỏ bọc khác nhau và có những hệ quả sâu sắc trong động lực học và quang học. Trong thực tế, quan sát này đưa chúng ta tới tới một lĩnh vực nghiên cứu rất năng động là bộ môn tôpô symplectic [HZ].

9.4 Hàm sinh

"Chứng minh" của sự bảo toàn diện tích là không thật chặt chẽ, bởi vì tôi thậm chí còn không định nghĩa chính xác phép ánh xạ φ, mà chỉ nói rằng nó được xác định bởi một hệ cơ được mô tả một cách lờ mờ. Sau đây là mô tả cụ thể hơn. Những gì ta thực sự cần từ hình 9.2 là thế năng $P = P(x,\ X)$ của hệ. Theo định nghĩa của thế năng,* ta có các lực:

$$\begin{cases} f = -\dfrac{\partial}{\partial x} P(x,\ X) \\ F = -\dfrac{\partial}{\partial X} P(x, X). \end{cases} \qquad (9.4)$$

---

* Nhắc lại rằng nếu *P(x)* là thế năng, khi đó lực là – *P′(x)*.

Đây là định nghĩa cụ thể của ánh xạ ψ. Ánh xạ được xác định bởi một hàm số P, gọi là *hàm sinh*. Ánh xạ sau khi đổi biến $\varphi = (x, y) \mapsto (X, Y)$ có được bằng cách đổi ký hiệu của F, như đã đề cập ở trên, và bằng cách đổi ký hiệu f thành y:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{\partial}{\partial x} P(x, X) \\ Y = \dfrac{\partial}{\partial X} P(x, X). \end{cases} \tag{9.5}$$

Ví dụ. Khảo sát một hàm số bậc hai đơn giản:

$$P(x, X) = \frac{1}{2} k(X - x)^2 .$$

Nó có thể được ví như là thế năng của một lò xo đàn hồi chặt có hai đầu được giữ tại các điểm x, X (hình 9.3), với hằng số Hooke k. Hệ phương trình (9.5) cho $X = x + ky$, $Y = y$; đây chính xác là ánh xạ trượt được định nghĩa trong mục 9.2, với $a = k$! Cái thú vị là, độ trượt, một tính chất hình học, được diễn giải như là hằng số Hooke, một thuộc tính cơ học. Cũng lưu ý rằng $X - x = ky$ chỉ là định luật Hooke cho lò xo đàn hồi chặt, trong khi $Y = y$ nghĩa là ta kéo hai đầu của lò xo với những lực bằng nhau!

9.5 Bảng tương ứng giữa Cơ học và Giải tích

Cơ học	*Giải tích*
Thế năng *P(x, X)*	Hàm sinh *P(x, X)*
Các lực	Các động lượng
$f = -\frac{\partial}{\partial x} P(x, X),$	$y = -\frac{\partial}{\partial x} P(x, X),$
$F = -\frac{\partial}{\partial X} P(x, X)$	$Y = \frac{\partial}{\partial X} P(x, X)$
Công được tay trái (phải) thực hiện: $\oint f\, dx \left(\oint F\, dX\right)$	Diện tích của tạo ảnh: $\oint y\, dx \ (\oint Y\, dX)$
Tổng công thực hiện bằng không: $\oint f dx + \oint F dX = 0$	Diện tích được bảo toàn: $\oint y\, dx = \oint Y\, dX$

Không gian bậc cao. Tính chất bảo toàn diện tích (9.3) có thể khái quát cho những phép ánh xạ trong không gian bậc cao bằng cách cho cả *x* và *y* ở trong không gian *n*-chiều $(n \geq 1)$: $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, sao cho $(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$. Khi đó *y dx* trong (9.3) phải được hiểu như tích chấm: $ydx = \sum y_k \ dx_k$. Phép ánh xạ $\varphi(x, y) \mapsto (X, Y)$ trong $\mathbb{R}^{2n}$ mà thỏa mãn tính chất (9.3) được gọi là một ánh xạ **symplectic**.

Diễn giải cơ học của hình 9.2 còn trở nên đơn giản hơn trong trường hợp không gian chiều cao *n = 3*: tôi không cần phải giữ cho các hình vành khuyên dọc theo những đường thẳng nữa, mà bây giờ là $x, f, X, F \in \mathbb{R}^3$. Lúc này *(x, y)* nằm

trong R^6 và ta có một phép ánh xạ $\varphi: R^6 \rightarrow R^6$. Phép ánh xạ này gán cặp (vị trí, lực) ở tay trái tôi cho cặp (vị trí, lực) ở tay phải tôi. Phép ánh xạ này hiển nhiên là ánh xạ symplectic (sau một phép đổi biến như được mô tả ở định lý vừa rồi). Khi hai đứa trẻ cùng quay vòng một sợi dây* bằng cách nắm lấy hai đầu của nó, chúng đang xây dựng một ánh xạ symplectic trong không gian R^6 (coi như sợi dây đứng yên).

Diễn giải cơ học có tính phổ quát đến mức nào? Có thể chỉ ra rằng, một ánh xạ symplectic bất kỳ, không quá suy biến vừa phải, là hợp thành của những ánh xạ xây dựng trên những hệ cơ học tương tự như các hệ vừa được mô tả.

9.6 "Nguyên lý bất định"

Nguyên lý bất định cơ học lượng tử phát biểu một cách đại thể rằng nếu ta biết càng chắc chắn về vị trí của một hạt, ta càng kém chắc chắn về vận tốc của nó.

Tính chất bảo toàn diện tích có thể được xem như là một mô phỏng cơ học cổ điển của nguyên lý bất định. Hình 9.4 cho thấy một ánh xạ bảo toàn diện tích nén chiều rộng của một vùng phẳng theo phương x từ 1 xuống còn $\varepsilon \ll 1$. Ta có thể nghĩ về sự nén này như là sự thu nhận thông tin về x, bởi phạm vi giá trị x khả dĩ bị thu hẹp. Nhưng để bảo toàn diện tích, ánh xạ phải kéo giãn theo phương y. Sự kéo giãn này nghĩa là phạm vi của những giá trị Y là lớn, cho nên ta đã làm mất thông tin về Y. Tóm lại, để thu nhận được thông

---

* Nguyên văn: skipping rope – trò chơi nhảy dây: hai người đứng ở hai đầu dây liên tục (và đồng bộ) quay sợi dây vòng qua đầu rồi quét qua chân để cho những người khác có thể nhảy liên tục trong vòng quay của dây. – N.D.

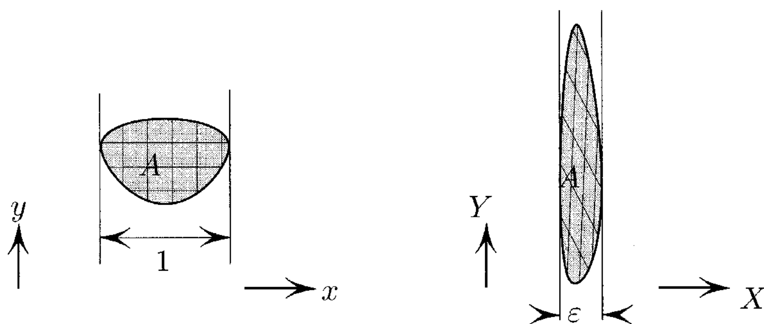
tin về X ta đã làm mất thông tin về Y; các biến số này có thể xem như những mô phỏng của vị trí và động lượng cơ học lượng tử, và thực tế chúng thường xuất hiện trong cơ học cổ điển như là vị trí và động lượng.

Bài toán. *Cho rằng phép ánh xạ trong hình 9.4 nén vùng phẳng như được minh họa. Chỉ ra rằng phạm vi của những giá trị Y trong ảnh của miền diện tích A tối thiểu là* A / ε.

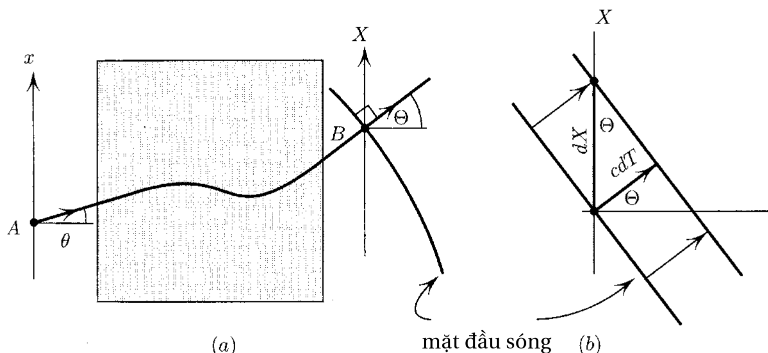
Kính viễn vọng phóng to những vật thể nhờ vào nguyên lý bất định này, như tôi sẽ giải thích sau (mục 9.8).

9.7 Bảo toàn diện tích trong quang học

Khảo sát một tia sáng truyền qua một thiết bị quang học – một ống kính, một kính viễn vọng, một thị kính, hay một vi kính – như trong hình 9.5.



Hình 9.4. Nén phạm vi của x làm giãn phạm vi của y, dẫn theo điều kiện bảo toàn diện tích.



Hình 9.5. (*a*) Thời gian di chuyển $T(x, X)$ định nghĩa phép ánh xạ biến (x, θ) thành (X, Θ) thông qua (9.6). (*b*) Chứng minh của (9.6).

Gọi x và X là tọa độ giao điểm của tia sáng với hai trục song song, x và X. Thời gian di chuyển giữa hai đường này được ký hiệu là $T(x, X)$. Cho $L(x, X) = cT(x, X)$, trong đó c = constant là vận tốc của ánh sáng trong không khí.* Cho $y = \sin\theta$, trong đó θ là góc giữa tia sáng và trục nằm ngang trực giao trục x trong hình 9.5(*a*). Một cách tương tự, ta định nghĩa $Y = \sin\Theta$. Ta sẽ chỉ ra rằng dữ liệu đầu vào (x, y) của tia sáng có liên hệ với dữ liệu đầu ra (X, Y) thông qua:

$$\frac{\partial}{\partial x}L(x, X) = -y \qquad (9.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial X}L(x, X) = Y.$$

---

* Theo đó L có chiều kích của khoảng cách; lưu ý rằng L là lớn hơn quãng đường thực của tia sáng bởi phần thời gian tiêu tốn trong thủy tinh nơi mà ánh sáng truyền chậm hơn, cho nên T là lớn hơn thời gian cũng quãng đường đó cần trong không khí. Trên thực tế ta có thể chọn hệ đơn vị sao cho $c = 1$, trường hợp mà ta sẽ có $T = L$.

Đây chính là quan hệ tương tự như (9.5) trong ví dụ lấy từ cơ học, hình 9.2! Ta đã chứng tỏ bằng một lập luận "phẩy-tay" dạng cơ (mục 9.3) rằng phép ánh xạ $(x,\ y) \mapsto (X,\ Y)$ bảo toàn diện tích. Đây là tính chất cơ bản của bất kỳ thiết bị quang học nào. Ta thấy (đúng nghĩa đen) các hiệu ứng của tính chất bảo toàn diện tích này khi ánh sáng truyền từ, một màn hình tivi chẳng hạn, qua tròng mắt kính, qua giác mạc, và lên võng mạc. Tôi sẽ mô tả một biểu hiện lý thú của tính chất bảo toàn diện tích ở mục tiếp theo.

Tương ứng cơ học. Bảng những tương ứng (mục 9.5) mở rộng từ cơ học sang quang học: hàm thế năng $P(x, X)$ tương ứng độ dài $L(x, X) = cT(x, X)$; lực $F = \frac{\partial}{\partial X} P(x, X)$ tương ứng $\sin\Theta$.

Chứng minh của (9.6). Hình 9.5 cho thấy một mặt đầu sóng của những tia sáng phát xuất tại A. Theo định nghĩa, mọi vị trí trên một mặt đầu sóng là cách đều A theo nghĩa luôn tốn một *thời lượng* như nhau để đến được vị trí đó từ điểm A– "chiếm thời lượng như nhau" sẽ là một cách diễn đạt chính xác hơn.*

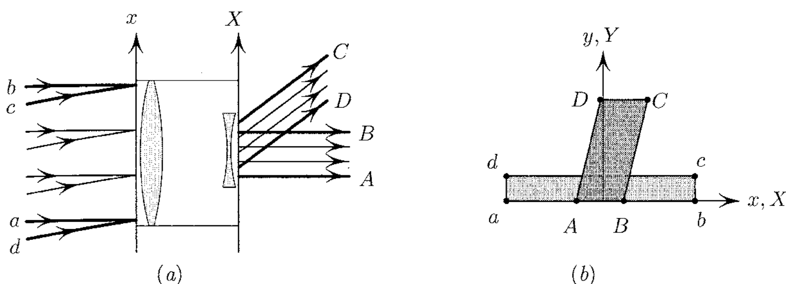
1. Hóa ra *mặt đầu sóng luôn luôn vuông góc với tia sáng* trong môi trường đẳng hướng,** như ta đã giả sử tất cả thấu kính trong thiết bị quang học của ta đều như vậy. Có thể suy ra tính trực giao này từ nguyên lý Huygen;

---

* Bởi thời gian được đề cập như là *độ dài quang học*, ta có thể nói rằng mặt đầu lan truyền tại A là một tập hợp cách đều quang học tính, điều đó nghĩa là, một đường tròn theo ngữ nghĩa của độ dài quang học.

** Điều này nghĩa là vận tốc ánh sáng tại mỗi điểm không phụ thuộc vào phương truyền.

do tính đẳng hướng, tập hợp vô cùng bé các điểm có thể đến được đó trong thời gian dt từ một điểm đã cho (các tập hợp điểm này được gọi là các mặt khúc xạ) là hình cầu chứ không phải hình ellipse. Thông tin bổ sung có thể được tìm thấy trong cuốn [ARN]. Trong hình học Euclid, các bán kính luôn vuông góc với đường tròn; cũng vì lý do đó mà những tia sáng luôn vuông góc với các mặt đầu sóng – cần nhắc lại rằng các mặt đầu sóng được định nghĩa như là những đường tròn với thời gian giữ vai trò khoảng cách.*



Hình 9.6. Nếu chùm tia thu hẹp, khi đó góc giữa hai chùm tia mở rộng ra. Điều này được nhận thấy như là sự phóng to. Nếu chùm tia thu hẹp lại, coi như, bốn lần, khi đó thiết bị phóng ta theo hệ số là 4.

2. Xem xét hai vị trí liên tiếp của một mặt đầu sóng, cách nhau một thời lượng ngắn dT (hình 9.5). Mặt đầu dịch chuyển một đoạn cdT, và giao điểm với trục X chuyển đi một đoạn $dX = cdT / \sin\Theta$. Theo đó $cdT / dX = dL / dX = \sin\Theta = Y$.

---

* Tất cả điều này là một chủ đề của hình học vi phân; một thảo luận tốt có thể được tìm thấy trong, như là, cuốn [DO].

Chú ý. Công thức (9.6) phụ thuộc vào dữ kiện rằng các góc θ, Θ được đo trong không khí.

9.8 Kính viễn vọng và bảo toàn diện tích

Xét một thiết bị quang học, như là một kính viễn vọng hay một thị kính (dạng sau được cho thấy dưới dạng biểu đồ trong hình 9.6). Đối với chúng ta thiết bị này là một hộp đen: ta không biết hay không quan tâm xem có thấu kính nào, có gương nào ở bên trong, hay có bao nhiêu cái. Tất cả những gì ta biết là:

Một chùm song song của tia sáng được biến đổi thành một chùm song song hẹp hơn.

Chỉ riêng dữ kiện này bao hàm ý nghĩa là thiết bị quang học sẽ phóng to vật thể! Tại sao? Sau đây là phác họa cho câu trả lời. Trong mục trên ta đã khảo sát phép ánh xạ $(x, y = \sin\theta) \mapsto (X, Y = \sin\Theta)$, vốn gán dữ liệu đầu vào của tia sáng cho dữ liệu đầu ra. Ta đã thể hiện rằng phép ánh xạ đó là bảo toàn diện tích. Bây giờ, sự thu hẹp của chùm tia hàm nghĩa rằng phép ánh xạ nén một hình chữ nhật mỏng $abcd$ theo phương x. Tính chất bảo toàn diện tích khi đó tác dụng một sự kéo giãn bù lại theo phương y. Mà sự kéo giãn theo phương y bản thân nó biểu hiện như sự phóng to ảnh.

Thực tế ta sẽ chỉ ra rằng hệ số phóng to bằng với tỉ lệ bề rộng của chùm tia, giả định rằng các góc với trục quang học (ví dụ đường trục đối xứng hình học) là nhỏ.

Sau đây là một giải thích chi tiết hơn cho nhận định ở trên.

Trong thảo luận sau ta sẽ làm việc với những góc nhỏ, điều này cho phép ta coi $y = \sin\theta$ xấp xỉ θ và $Y = \sin\Theta$ xấp xỉ Θ.

1. Mỗi tia sáng – như, *cC* trong hình 9.6 – được đặc trưng bởi một điểm *(x, y)* trong mặt phẳng, trong đó *x* là tọa độ nhập vào và *y* là góc xấp xỉ của tia sáng với trục quang học.
2. Hệ số phóng to của thị kính là tỉ số θ_2 / θ_1, trong đó θ_1 là góc giữa hai chùm tia song song tới thị kính, và θ_2 là góc giữa các chùm ra (hình 9.6). Trước tiên, lưu ý rằng một chùm tia song song được cảm nhận bằng mắt chúng ta như là một điểm, bởi tất cả tia sáng song song hội tụ tại một "điểm ảnh" của võng mạc chúng ta (giả định chúng ta lấy tiêu điểm mắt mình ở vô cực và có tầm nhìn hoàn hảo). Bây giờ, hình dung ta đang nhìn vào một con thuyền ở xa, có chùm tia song song *ab* (hình 9.6) đến từ một điểm* ở đuôi tàu và có chùm tia khác *dc* đến từ một điểm ở mũi tàu. Với mắt thường đuôi tàu và mũi tàu hiện ra rất gần bởi vì các chùm tia hợp thành một góc nhỏ; tôi hầu như không cần xoay mắt mình để nhìn từ đầu này đến đầu kia. Nhưng các chùm tia được biến đổi *AB* và *CD* hợp thành một góc lớn hơn, để mà đuôi tàu và mũi tàu sẽ hiện ra cách xa nhau hơn – chính xác là xa hơn θ_2 / θ_1 lần.
3. Chùm tia tới *ab* trong hình 9.6(*a*) tương ứng với đoạn

---

* Các tia sáng phát ra từ một điểm thì không hoàn toàn gọi là song song, nhưng con thuyền là ở rất xa và ta có thể xem như chúng là song song.

ab trong hình 9.6(*b*); chùm tia tới bị nghiêng trong hình (*a*) tương ứng với đoạn *cd* trong hình (*b*). Các chùm tia có góc và vị trí nằm giữa hai đối cực này hợp thành phần bên trong của hình chữ nhật *abcd*. Đoạn nằm ngang *ab* ánh xạ thành một đoạn ngắn hơn *AB* nhờ vào tính chất chùm-tia-thu-hẹp. Độ dài của đoạn nằm ngang là bề rộng của chùm tia song song tương ứng. Do đó tỉ số của các độ dài $ab / AB = \lambda$, bằng với tỉ số của bề rộng các chùm tia. Nhờ sự tuyến tính, mọi đoạn nằm ngang trong *abcd* (i) ngắn lại theo cùng một hệ số λ và (ii) vẫn nằm ngang. Độ cao của *abcd* là $\sin\theta_1$, trong khi độ cao của *ABCD* là $\sin\theta_2$. Các diện tích của *abcd* và *ABCD* là bằng nhau:

$$ab \cdot \sin\theta_1 = AB \cdot \sin\theta_2\,;$$

thay sin θ bằng θ và dùng $ab/AB = \lambda$, ta thu được hệ số phóng to như là tỉ số của bề rộng các chùm tia:

$$\theta_2 / \theta_1 = \lambda\,.$$

9.9 Bài tập

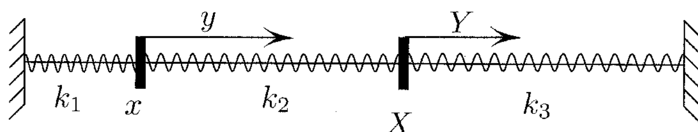
1. Kiểm chứng rằng nếu đạo hàm riêng hỗn hợp $\frac{\partial^2}{\partial x \partial x} P(x,X) \neq 0$, khi đó hệ phương trình (9.5) xác định *X, Y* như là những hàm số của *x, y*.

   Lời giải. Theo điều kiện, $\frac{\partial}{\partial x} P(x,X)$ là một hàm đơn điệu của *X*. Theo đó *X* được xác định chỉ theo *x, y*. Theo đó phương trình thứ hai (9.4) xác định *Y* theo *x, y*.

2. Phép ánh xạ tương ứng với hàm sinh $P = \frac{k}{2}(X - x)^2$

là gì? Làm thế nào một phép ánh xạ như vậy có thể hiện thực hóa được bằng cách sử dụng cơ học? Gợi ý: Xem hình 9.3.

3. Tìm hàm sinh *P(x, X)* tạo ra từng loại ánh xạ trong hình 9.1.
4. Biết một phép ánh xạ tuyến tính với định thức bằng 1, tìm một hàm sinh tạo ra phép ánh xạ này.
5. Xem xét một hệ với lò xo được thể hiện trong hình 9.7. Ánh xạ nào trong hình 9.1 có thể được hiện thực hóa nhờ vào sự lựa chọn thích hợp những hằng số Hooke k_1, k_2 và k_3?



Hình 9.7. Một phép ánh xạ diện-tích-bảo-toàn tổng quát (hơn) được hiện thực hóa nhờ những lò xo.

6. Chọn lựa nào cho những hằng số Hooke trong hình 9.7 tương ứng với hệ kính trong hình 9.6(*a*)?
7. (Trong bài tập này tôi giả định độc giả quen thuộc với công thức thấu kính). Tìm tương tự cơ học của công thức thấu kính $\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}=\frac{1}{f}$. Gợi ý: Công thức thấu kính thể hiện một thực tế là các tia sáng được phóng ra từ một điểm tái hội tụ tại một điểm khác. Tất cả tia sáng như vậy tốn một thời lượng như nhau [truyền đi] giữa hai điểm này. Đối với một hệ cơ học tương ứng, thế năng là như nhau cho những hình trạng khác nhau,

và một tổng nào đó của lực thế nên bằng không.

8. Cho ma trận A 2 x 2 đối xứng bất kỳ, tìm một hệ cơ học có thế năng là dạng toàn phương $\frac{1}{2}\langle A\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle$, và theo đó lực thế tại x là Ax.
9. Bằng cách sử dụng mô hình hóa cơ học của một ma trận đối xứng A từ bài tập ở trên, chứng minh rằng giá trị riêng của A là số thực. Gợi ý: Nếu các giá trị riêng không là số thực, thì sẽ tồn tại một động cơ vĩnh cửu. Ấy là, khi đó công được lực Ax thực hiện vòng quanh đường tròn đơn vị là bằng không (chứng minh không đòi hỏi phép tính nào).
10. Hãy chỉ ra rằng tính trực giao của véc tơ riêng của một ma trận đối xứng A là một hệ quả của sự không tồn tại động cơ vĩnh cửu. Gợi ý: diễn giải Ax như là lực được một thiết bị cơ học thích hợp gây ra.

10

CÁI BÁNH XE ĐẠP VÀ ĐỊNH LÝ GAUSS-BONNET

10.1 Giới thiệu

Chương này kể một câu chuyện lý thú về mối liên hệ giữa trò chơi với cái bánh xe đạp và một định lý cơ bản của hình học vi phân. Các góc nội tiếp trong một tam giác phẳng có tổng bằng 180^0. Khẳng định này có thể phát biểu lại một cách tổng quát và cơ bản hơn: nếu tôi đi vòng quanh một đường cong kín trên mặt phẳng, khi đó mũi của tôi được xem như là một véc tơ, sẽ quay một góc là 2π (với điều kiện là tôi luôn nhìn thẳng tới trước).*

Liệu điều tương tự còn đúng với những cư dân sống trên những mặt cong? Hình 10.1 minh họa một đường đi hình tam giác trên mặt cầu. Hai cạnh nằm trên những kinh tuyến và một cạnh trên xích đạo. Đối với cư dân của mặt cầu các cạnh của tam giác hiện ra như một đường thẳng.** Một máy bay bay vòng quanh tam giác này sẽ rẽ trái một góc $\pi/2$ ba

* Ý nghĩa toán học cụ thể của phát biểu này được cho trong mục 10.3.

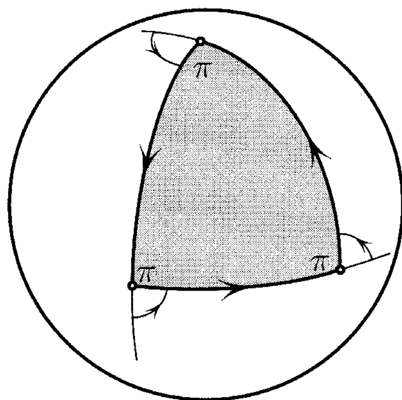
** Những đường "thẳng" như vậy được gọi là *những đường trắc địa* và được định nghĩa ở mục 10.3.

lần giữa các lối đi "thẳng", theo đó tổng cộng xoay một góc $3\pi / 2 < 2\pi$ trong suốt hành trình của nó. Thực ra với mọi đường đi khép kín trên một mặt cầu đơn vị, "góc xoay" có thể tính bằng:

$$\theta = 2\pi - A , \qquad (10.1)$$

trong đó A là diện tích được lối đi kín bao quanh. Đối với đường theo phương xích đạo, ví dụ, ta có $A = 2\pi$ (diện tích của mặt bán cầu), và theo đó $\theta = 2\pi - 2\pi = 0$, phù hợp với trực giác.

Biểu thức (10.1) là một trường hợp đặc biệt của định lý Gauss-Bonnet. Định lý xác định "góc xoay" θ cho một lối đi kín trên một mặt trơn bất kỳ, không nhất thiết phải là mặt cầu. Các kiến thức cơ bản cần thiết cho phát biểu định lý được trình bày ở mục 10.3.

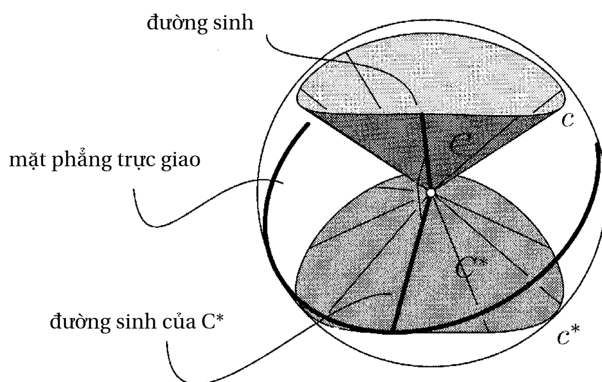


Hình 10.1. Tổng các góc trong một tam giác cầu là $\pi - A / R^2$.

Sau đây là tóm tắt nội dung của chương. Cốt lõi của định

lý Gauss-Bonnet nằm trong một định lý được phát biểu đơn giản về những mặt nón ở mục 10.2; nó là điểm chốt của cả chương. Định lý này nảy ra trong đầu tôi khi tôi đang thay một cái săm xe bị thủng, như mô tả ở mục 10.5. Không chỉ phát biểu định lý mặt nón được cơ học gợi ý, mà ngay cả chứng minh cũng được cơ học đưa ra (tr. 177).* Nội dung của các mục còn lại là những ứng dụng của định lý mặt nón, bao gồm:

1. Làm thể nào để đo diện tích của một miếng đất bằng cách sử dụng một bánh xe quán tính.
2. Làm thế nào sự đổi hướng của trục bánh xe gây ra chuyển động quay.



Hình 10.2. Định nghĩa của mặt nón đối.

3. Kiến thức cơ bản cho định lý Gauss-Bonnet (độ cong

* Chứng minh toán học thuần túy có thể được tìm thấy trong cuốn [L2].

trắc địa và độ cong Gauss).

4. Định lý Gauss-Bonnet như là một sự phát biểu lại định lý nón đối ngẫu.

Sau khi hiểu phát biểu của định lý nón đối ngẫu, các mục còn lại có thể được đọc theo trình tự bất kỳ, với một ngoại lệ hiển nhiên là mục về định lý Gauss-Bonnet phải dựa trên phần hiểu biết cơ bản ở trước nó.

10.2 Định lý nón đối ngẫu

Định nghĩa nón đối ngẫu. Gọi C là một mặt nón lồi, như trong hình 10.2. Các tia tạo nên mặt nón được gọi là đường sinh. Để định nghĩa mặt nón đối, tưởng tượng một họ mặt phẳng vuông góc các đường sinh của C. Tất cả mặt phẳng này tiếp tuyến với mặt nón bất khả kiến nào đó, như trong hình 10.2. Mặt nón này được gọi là nón đối ngẫu của C, được kí hiệu là C^*.

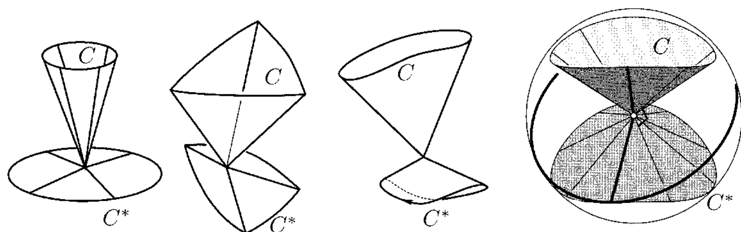
Tính đối ngẫu là thuận nghịch: đối ngẫu của C^* là C, tức là $(C^*)^* = C$. Lý do là định nghĩa của C^* tương đương với hai nhận định sau đây:

1. Các đường sinh của C và C^* hợp thành những cặp trực giao, như được minh họa trong hình 10.2.
2. Các tiếp tuyến với hai đường cong c và c^* tại các điểm tương ứng là song song, trong đó c và c^* là các đường cong giao tuyến của C và C^* với mặt cầu đơn vị.

Nhưng hai tính chất này hoàn toàn đối xứng: không mặt nón nào được ưu tiên, và vì thế mỗi mặt nón là đối ngẫu của cái nón còn lại. Chứng minh chi tiết có thể được tìm

thấy trong cuốn [L2].

Dễ thấy rằng nón càng nhọn, thì nón đối ngẫu càng tù. Định lý sau đây phát biểu một mối quan hệ cụ thể giữa chúng. Mặc dù đơn giản, định lý này góp phần tạo nên công thức Gauss-Bonnet (như được cho thấy ở mục 10.4).



Hình 10.3. Vài mặt nón và phần đối của chúng. $A(c)+L(c^*)=2\pi$

Định lý nón đối ngẫu. *Nếu C là một mặt nón lồi và C* là nón đối ngẫu của nó, thì ta có*:

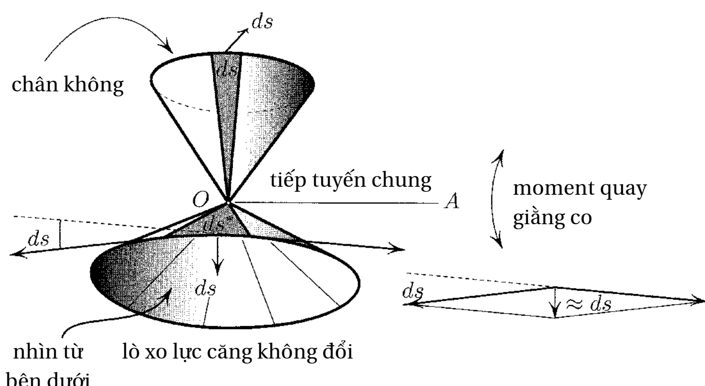
$$A(C)+L(C^*)=2\pi\ , \qquad (10.2)$$

trong đó A(C) là góc khối của C, nghĩa là, diện tích phần mặt cầu đơn vị S^2 *được giới hạn bởi C và L(C*) là độ dài của đường cong* $C^* \cap S^2$ *trên mặt cầu đơn vị. Lưu ý rằng các mặt nón ở đây không nhất thiết phải tròn.*

Định lý hình học thuần túy này được gợi ra nhờ cơ học, cũng như là chứng minh được đưa ra tiếp đây.

Chứng minh nhờ cơ học.

Hệ cơ học. Các đường sinh của hai mặt nón C và C^* hợp thành những cặp trực giao. Ta hãy đại diện cho mỗi đường sinh bằng véc tơ đơn vị của nó, với đuôi đặt tại đỉnh của mặt nón. Theo đó ta có một bó những hình ngoặc vuông chập lại với nhau tại tâm (hình 10.4). Ta nghĩ về những hình ngoặc vuông này như những vật thể đặc có thể xoay tự do quanh tâm. Các đầu của những hình ngoặc vuông này hợp thành hai đường cong c và c^* trên mặt cầu đơn vị S^2.



Hình 10.4. Áp lực trên *ds* (*phía trên*) cân bằng hợp lực của lực căng lên ds^* (*phía dưới*).

Bây giờ ta hình dung rằng mặt cầu chứa một chất khí hai chiều có áp suất $p = 1$, nhưng phần nón cầu được c bao lấy chứa chân không. Áp suất cố làm sụp đổ đường cong c. Để bù lại, ta hình dung đường cong c^* là một lò xo lực căng không đổi, có lực căng $T = 1$, được dính vào các đầu "thấp hơn" của các hình ngoặc vuông. Điều này tạo ra một sự

giằng co: cả hai đường cong đều có xu hướng sụp đổ – một cái do áp suất, cái còn lại do lực căng.* Độ rắn của các hình ngoặc vuông ngăn sự sụp đổ xảy ra đồng thời.

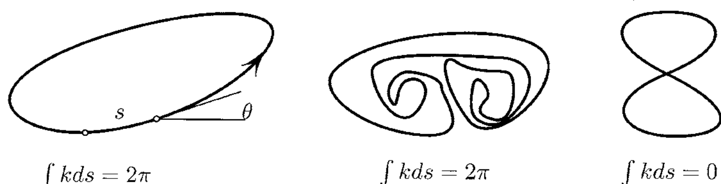
Trạng thái cân bằng. Đáng lưu tâm là, hệ cơ tính vừa được mô tả là ở trạng thái cân bằng phiếm định bất kể hình dáng của mặt nón C. Tạm gác lại phần chứng minh một lúc, ta lưu ý rằng điều này hàm chỉ nhận định (10.2). Quả vậy, thế năng khi đó là không phụ thuộc vào hình dáng của C. Nhưng thế năng của bong bóng chân không là $A(C)$, trong khi thế năng của một lò xo lực căng không đổi là độ dài $L(C^*)$ của nó (xem mục A.4 và A.1). Do vậy:

$$A(C) + L(C^*) = \text{constant}\,.$$

Bằng cách đè bẹp C về một điểm ta mở rộng C^* thành một đường tròn cực đại, và theo đó hằng số được xác định bằng 2π, do đó chứng minh được (10.2).

Còn phải chứng tỏ rằng hai mặt nón luôn ở trạng thái cân bằng. Xem xét hai hình quạt nhỏ tương ứng trên C và trên C^*. Gọi ds và ds^* là các độ dài của các cung tương ứng của c và c^* (hình 10.4). Áp lực trên ds được cho bởi $p\,.\,ds = ds$ và theo đó moment quay quanh phương OA song song với tiếp tuyến tại một điểm trên cung bằng $ds+\varepsilon$, trong đó ε là nhỏ vô cùng so với ds: $\varepsilon / ds \to 0$ khi $ds \to 0$. Mặt khác, cung ds^* tùy thuộc vào hai đơn vị lực của lực căng; góc giữa hai

* Áp lực và căng thẳng có thể có ảnh hưởng như nhau lên con người [nguyên văn: pressure and tension; pressure vừa nghĩa là áp suất, vừa có nghĩa là áp lực, tension vừa có nghĩa lực căng (đối với các vật, như là, dây, lò xo...), vừa có nghĩa căng thẳng (đối với người) – N.D]



Hình 10.5. Độ cong phẳng và tích phân của nó. Trong suốt hành trình vòng quanh đường cong, tiếp tuyến xoay một góc 2π nếu đường cong không tự-cắt.

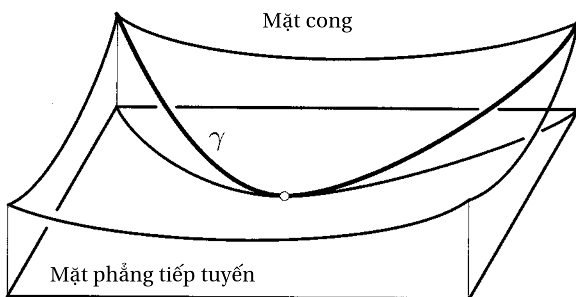
lực này được cho theo góc giữa hai mặt phẳng tiếp xúc với mặt nón C^* dọc theo hai đường sinh viền ngoài hình quạt. Nhưng *góc giữa hai mặt phẳng này bằng với góc giữa đường vuông góc của chúng*, chính là, *với* ds. Ta kết luận rằng hợp lực lên cung ds^* là $2T\sin(ds/2) = ds + \varepsilon$. Moment quay trên ds^* có độ lớn $ds + \varepsilon$. Các moment quay giằng co trên ds và ds^* thế nên có cùng độ lớn, theo thứ bậc quan trọng. Ngoài ra, các phương của những moment quay này là ngược nhau, bởi các tiếp tuyến tại các điểm tương ứng trên c và c^* là song song.

Phần còn lại của chương này ta khai phá vài hệ quả của định lý nón đối ngẫu.

10.3 Sự lập thành công thức Gauss-Bonnet và hiểu biết cơ bản

Trong mục này tôi trình bày phát biểu của định lý Gauss-Bonnet; mục kế cho thấy làm thế nào định lý này suy ra từ định lý về những nón đối ngẫu.

Độ cong phẳng. Độ cong của một đường cong phẳng được định nghĩa như là



Hình 10.6. Độ cong trắc địa là độ cong của đường cong được chiếu lên mặt phẳng tiếp tuyến.

$$k = \frac{d\theta}{ds}$$

(hình 10.5), trong đó s là độ dài cung và θ là góc giữa tiếp tuyến và một phương cố định trong mặt phẳng.

Nói theo vật lý, k là vận tốc góc của tiếp tuyến khi tiếp điểm di chuyển dọc theo đường cong ở vận tốc đơn vị. Thực vậy, nếu vận tốc là 1, khi đó s là thời gian, và $\frac{d\theta}{ds}$ là vận tốc thay đổi của góc theo thời gian, chính là, vận tốc góc.

Dễ thấy là nếu tôi đi vòng quanh một lối đi phẳng kín không tự giao với chính nó, lúc nào cũng nhìn thẳng phía trước, khi đó mũi của tôi sẽ xoay một góc 2π:

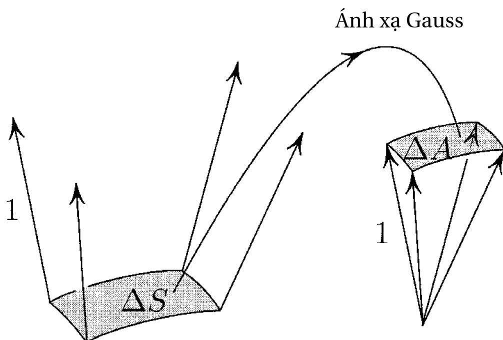
$$\int_0^L k(s)ds = 2\pi\,; \qquad (10.3)$$

chuẩn xác hơn, theo định nghĩa của k và theo định lý cơ bản của giải tích thì:

$$\int_0^L k(s)ds = \int_0^L \frac{d\theta}{ds}ds = \theta(L) - \theta(0) = 2\pi\,,$$

trong đó phương trình sau cùng diễn tả việc tiếp tuyến với một đường cong kín sẽ xoay một góc 2π nếu đường cong không tự nó giao cắt. Dữ kiện này là không quá hiển nhiên như thoạt trông: đối với một đường cong "rối" như trong hình 10.5 nó có thể không rõ ràng đến vậy. Một chứng minh chặt chẽ có thể được tìm thấy trong cuốn [CL].

Độ cong trắc địa. Thay vì một mặt phẳng bây giờ ta xét đến một mặt cong (hình 10.6). Ta hãy hình dung một con kiến di chuyển dọc theo một lối đi γ trên mặt cong. Con kiến bé xíu nghĩ rằng mặt cong là phẳng, và với nó độ cong của γ tại một điểm, đơn giản, là độ cong (phẳng) hình chiếu của γ lên mặt phẳng tiếp tuyến tại điểm đó. Độ cong "hình chiếu" này được gọi là *độ cong trắc địa* của γ. Tích phân $\int_\gamma k(s)\, ds$ có ý nghĩa của một góc mà theo đó nó xoay theo trong hành trình ngang qua γ. Đường cong bất kỳ mà có độ cong trắc địa là bằng không sẽ được con kiến cảm nhận như một đường thẳng. Đường cong như vậy được gọi là *đường trắc địa.*



Hình 10.7. Độ cong Gauss

Sau đây là một *diễn giải vật lý*: *độ cong trắc địa của một đường cong* γ *trên một mặt cong là vận tốc góc quay quanh đường pháp tuyến với mặt cong của véc tơ tiếp xúc có điểm gốc di chuyển dọc theo* γ *ở vận tốc đơn vị.*

Độ cong Gauss. Để định nghĩa độ cong Gauss tại một điểm p, ta xét một miếng nhỏ có diện tích ΔS để bao xung quanh p (hình 10.7).

Quan sát miếng "lông nhím" tạo thành từ những véc tơ pháp tuyến đơn vị ở trên miếng nhỏ đang xét. Ta rê từng véc tơ đơn vị này đi và đặt gốc của chúng tại một điểm chung. Bằng cách này ta gán một điểm trên mặt cầu đơn vị cho mỗi điểm trên mặt cong. Ánh xạ này được gọi là *ánh xạ Gauss*, mặc dù *ánh xạ chuột* (hay một ánh xạ maus*) sẽ gợi tả hơn. Gọi ΔA là góc khối của hình nón có được. *Độ cong Gauss* tại một điểm p được định nghĩa là

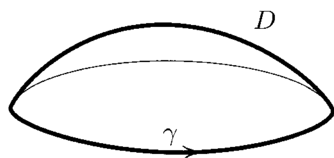
$$K = K(p) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta S},$$

trong đó giới hạn được lấy trên khắp các miếng chứa p với đường kính tiến về không. Nói cách khác, K là định thức Jacobi của ánh xạ Gauss. Độ cong Gauss đo "độ phồng" của mặt cong. Diện tích ΔA mang dấu; với những bề mặt lồi như một quả trứng, nó là dấu dương, và theo đó $K > 0$ (ta giả định trường hợp không suy biến). Với một mặt yên ngựa, $K < 0$. Hình trụ, dù có mặt cong, là không bị phồng và thực tế có $K = 0$. Thực vậy, với hình trụ ảnh của một mảnh

---

* Nguyên văn: a maus map: map nghĩa là ánh xạ; maus là một từ tiếng Đức, nghĩa là chuột. – N.D.

qua phép ánh xạ Gauss suy sụp thành một cung tròn, có diện tích $\Delta A = 0$.



Hình 10.8. Một miền D của mặt cong, được đường cong γ viền quanh.

Công thức Gauss-Bonnet. Khảo sát một miền D trên một mặt cong được đường cong γ viền quanh, như được cho thấy trong hình 10.8. Người đọc có thể nghĩ về γ như là một vĩ tuyến trên mặt cầu; tuy nhiên, đừng coi nó là tròn: nó có thể là con đường nào đó trên bề mặt của một tiểu hành tinh có hình dạng không đều. Công thức Gauss-Bonnet phát biểu rằng:

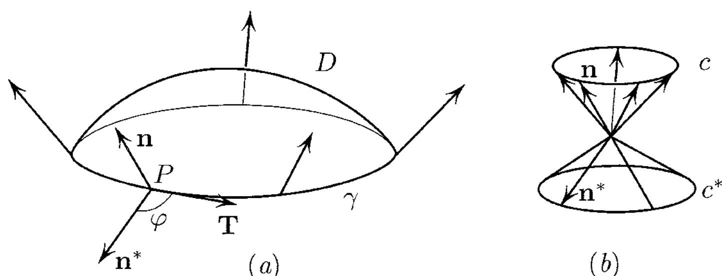
$$\int_{\gamma} k\,ds + \iint_{D} K\,dS = 2\pi \,, \qquad (10.4)$$

trong đó k là độ cong trắc địa của đường cong γ, K là độ cong Gauss của mặt cong, và ds là một phần tử nhỏ vô cùng của diện tích bề mặt.

Một diễn giải của công thức Gauss-Bonnet. Ta hãy viết lại (10.4) như:

$$\int_{\gamma} k\,ds = 2\pi - \iint_{D} K\,dS \,.$$

Vế trái có thể được ví như là góc xoay – góc mà theo đó đầu máy bay xoay khi máy bay di chuyển một vòng quanh đường cong γ trên mặt cong. Định lý phát biểu rằng góc xoay là bằng 2π trừ đi tổng “độ phồng” $\iint K\ dS$ trên miền.



Hình 10.9. Chứng minh của định lý Gauss-Bonnet.

Ta vừa diễn dịch (10.4), nhưng liệu nó có một giải thích đơn giản không? Trong mục tiếp theo tôi sẽ cho thấy rằng (10.4) suy ra từ định lý nón đối ngẫu. Và điểm cốt lõi của định lý nón đối ngẫu là việc góc giữa hai mặt phẳng bằng với góc giữa hai đường vuông góc của chúng. Điều tương tự, thế nên cũng có thể được phát biểu cho công thức Gauss-Bonnet. Một lần nữa như trong nhiều ví dụ khác, điều gì đó không ngờ và thú vị (định lý Gauss-Bonnet) giản lược thành một điều gì khác đơn giản đến không ngờ.

10.4 Công thức Gauss-Bonnet

Định lý nón đối ngẫu, mà ta "đã chứng minh được" bằng một lập luận cơ học đơn giản, có thể được phát biểu lại để trở thành định lý Gauss-Bonnet. Cho nên sau cùng, ta có thể dùng cơ học để chứng minh định lý Gauss-Bonnet.

Chứng minh. Ta bắt đầu bằng việc xác lập bối cảnh của công thức Gauss-Bonnet: trên một bề mặt lồi trong R^3 là một hình đĩa D được bao bởi một đường cong khép kín γ (hình 10.9).

Xét một mặt nón C được tạo thành từ những véc tơ pháp tuyến n với D chạy dọc theo γ, cùng với mặt nón đối ngẫu C^*. Theo định lý nón đối ngẫu:

$$A(C) + L(C^*) = 2\pi. \qquad (10.5)$$

Theo định nghĩa của độ cong Gauss, $K = dA/dS$, ta có:

$$A(C) = \int_D K\, dS .$$

Còn phải chỉ ra rằng số hạng thứ hai trong (10.5) là tích phân của độ cong trắc địa. Ta hãy rê một véc tơ pháp tuyến đơn vị $\mathbf{n}^* \in c^*$ trong hình 10.9(b) đến điểm tương ứng trên γ (hình 10.9(a)). Lưu ý rằng $L(C^*) = \int_\gamma \omega(\mathbf{n}^*)\, ds$, trong đó $\omega(\mathbf{n}^*)$ là vận tốc góc của véc tơ n^* quanh phương pháp tuyến n, khi điểm P di chuyển vòng quanh γ ở vận tốc đơn vị. Bởi góc $\varphi = \angle(\mathbf{n}^*, \mathbf{T})$ là một hàm tuần hoàn trên s, ta có:

$$\int_\gamma \omega(\mathbf{n}^*) ds = \int_\gamma \omega(\mathbf{T}) ds .$$

Cần nói rằng nếu tôi đi một vòng quanh γ, lúc nào cũng nhìn thẳng phía trước, khi đó mũi của tôi sẽ xoay một góc đúng bằng với khi tôi xoay đầu liên tục trong suốt quãng đường nhưng miễn sao khi quay về mặt vẫn hướng cùng một hướng như khi khởi hành. Nhưng $\omega(\mathbf{T}) = k$ theo định nghĩa của độ cong trắc địa. Điều này chỉ ra rằng $L(C^*) = \int_\gamma k\ ds$ và kết thúc chứng minh của công thức Gauss-Bonnet.

10.5 Bánh xe đạp và các mặt nón đối ngẫu

Ý tưởng về những mặt nón đối ngẫu được gợi ra bởi một cái bánh xe đạp. Khi tôi đang vá một cái săm xe đạp bị thủng, câu hỏi sau đây chợt đến: "Có thể xoay một bánh xe quanh trục khi chỉ cầm trục của bánh xe không?" Ban đầu, cái bánh xe ở trạng thái nghỉ, các ổ trục hoàn hảo, và bánh xe được giữ cân bằng, sao cho không quay quanh trục của nó.

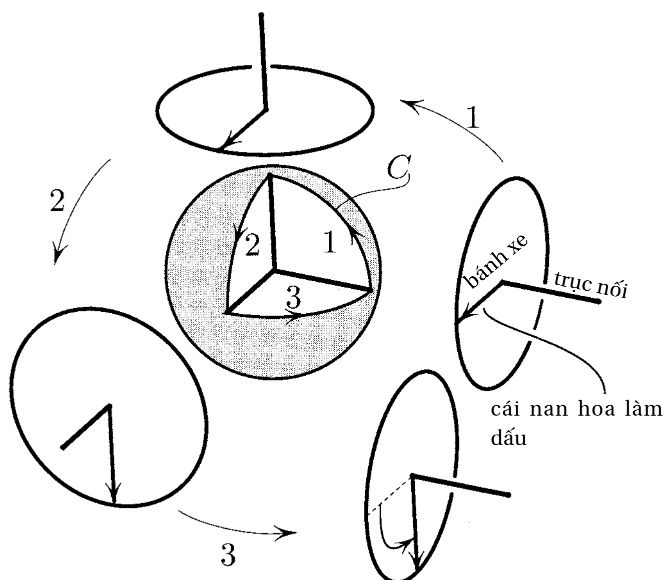
Một ví dụ trong hình 10.10 cho thấy rằng câu trả lời là có thể. Thực tế, bánh xe xoay một góc cho bởi góc khối của mặt nón được trục vạch ra, như ta sẽ chỉ ra.*

Có thể giả lập chuyển động trong hình 10.10 với một cánh tay, như sau. Đưa thẳng tay phải của bạn ra phía trước mặt, nắm bàn tay lại thành hình quả đấm và giữ ngón cái giơ lên. Cánh tay là trục của một bánh xe giả tưởng, và ngón cái là một cái nan hoa làm dấu trên bánh xe đó, trực giao với cánh tay/trục. Bây giờ thực hiện ba chuyển động như sau:

1. Đưa cánh tay lên qua khỏi đầu bạn; ngón cái sẽ chỉ về phía sau. Giữ sao cho cổ tay bạn không lúc nào bị xoay (như là khi bạn vặn một cái tuốc nơ vít); điều này giống như bánh xe không xoay quanh trục.

---

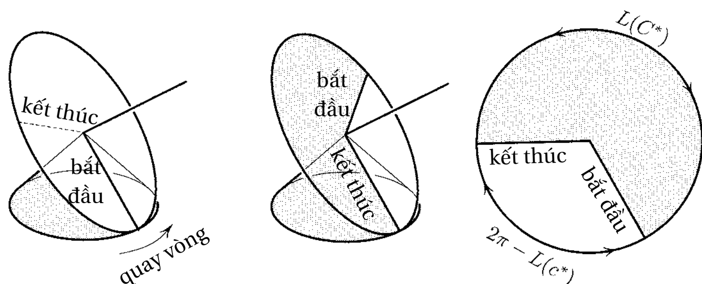
* Sự quay vòng này của bánh xe là một biểu hiện của cái-gọi-là holonomy liên đới phép chuyển dịch song song (cuốn [L2]). Một diễn giải cơ học của phép chuyển dịch song song là như sau. Cho một véc tơ chỉ phương, tưởng tượng rằng véc tơ này là một cái nan hoa của cái bánh xe mà vành xe tiếp xúc với bề mặt đường. Không lúc nào bánh xe xoay quanh trục của nó. Khi bánh xe được mang dọc theo một đường cong biết trước trên bề mặt đường, cái nan hoa bị di chuyển theo cách mà được câu ở trên chỉ ra. Đây là một diễn giải cơ học của phép dịch chuyển song song. Cho một định nghĩa chặt chẽ, xem cuốn [ARN].



Hình 10.10. Trục nối vạch ra một hình nón có góc khối $\pi/2$; bánh xe xoay một góc $\pi/2$.

2. Hạ cánh tay xuống vị trí nằm ngang phía bên phải của bạn. Ngón cái vẫn chỉ về phía sau.
3. Vẫn giữ nguyên cánh tay như vậy và đi một vòng trên mặt phẳng nằm ngang đến vị trí ban đầu. Ngón cái bấy giờ chỉ sang phải. Nhưng nó đã xảy ra, mà bạn không xoay cổ tay mình!

Lập luận của chúng ta dựa trên việc sử dụng quán tính của bánh xe để hoàn thành phép dịch chuyển song song. Để hoàn thành phép dịch chuyển song song của một véc tơ dọc theo một đường cong trên bề mặt phẳng, hình dung véc tơ này như là một cái nan hoa được đánh dấu trên bánh



Hình 10.11. Bánh xe quay vòng trên một mặt nón C^* xoay một góc $2\pi - L(c^*)$.

xe. Khi bánh xe được mang đi quanh đường cong, sao cho mặt phẳng chứa bánh xe luôn tiếp xúc với bề mặt phẳng, cái nan hoa trải nghiệm phép dịch chuyển song song.

Ý tưởng về mặt nón đối ngẫu đã đến từ việc suy nghĩ về một cái bánh xe như thế này. Hình dung cái bánh xe khi trục của nó quét thành một hình nón C (hình 10.11). Bánh xe thực hiện một chuyển động đung đưa lắc lư. Vành bánh xe tiếp xúc mọi lúc với một mặt nón giả tưởng trong không gian. Đây chính xác là mặt nón đối ngẫu C^*.

Bánh xe xoay một góc bao nhiêu sau khi trục của nó thực hiện một chuyển động dạng nón? Câu trả lời có được nhờ quan sát sau.

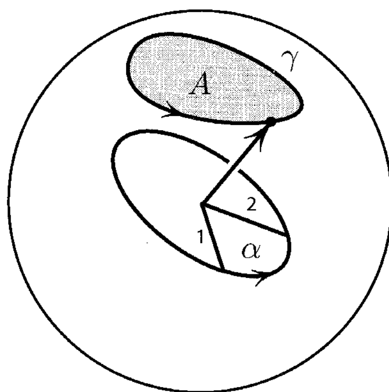
Định lý. *Giả sử mặt phẳng của bánh xe lăn tròn trên C^* mà không trượt; khi đó cái nan hoa tiếp xúc với C^* là trục đối xứng tức thời của chuyển động quay của bánh xe.*

Chứng minh. Xem xét cái nan hoa tiếp xúc C^* tại một thời điểm nào đó. Cái nan hoa này có vận tốc bằng không: thực vậy, vận tốc của nó theo phương pháp tuyến với mặt phẳng

là bằng không, bởi mặt nón C^* tĩnh tiếp xúc với mặt phẳng tại điểm đó. Thêm nữa, vận tốc trong mặt phẳng là bằng không bởi bánh xe không xoay quanh trục nhờ vào ổ trục hoàn hảo và nhờ vào giả thiết ban đầu bánh xe ở trạng thái nghỉ.

Hệ quả. *Sau khi trục chạy hết một vòng hình nón C, bánh xe xoay một góc* $\alpha = 2\pi - L(C^*)$ *.*

Chứng minh. Thực vậy, ta hình dung phủ một lớp sơn ướt lên C^*. Sau khi bánh xe thực hiện một vòng lăn quanh C^*, một phần hình quạt của bánh xe sẽ lấy mất lớp sơn của C^*. Bởi không có chuyển động trượt, *cung hình quạt có cùng độ dài như "phần hình váy" của nón* C^*, như được chỉ ra trong hình 10.11. Góc của phần cung không được sơn là $2\pi - L(c^*)$; đó là góc mà bánh xe đã xoay.



Hình 10.12. Cầu kế. Diện tích $A = \alpha r^2$.

Theo định lý nón đối ngẫu ta kết luận:

$$\alpha = A(C) . \quad (10.6)$$

Điều này nghĩa là *bánh xe xoay một góc bằng với góc khối của hình nón mà trục của nó khoét ra.*

10.6 Diện tích của một đất nước

Theo (10.6), nếu trục của một bánh xe khoét ra một nón C, thì từ trạng thái tĩnh bánh xe sẽ xoay một góc bằng với góc khối $A(C)$ của nón. Sau đây là một ứng dụng của quan sát này.

Cầu kế. Hình dung một quả cầu thủy tinh hữu cơ, với một cây kim nhọn quay quanh tâm; cây kim có thể chỉ vào bất cứ điểm nào trên quả cầu. Cây kim cũng đóng vai trò trục của cái bánh xe với ổ trục hoàn hảo.

Đo diện tích bên trong một đường cong kín γ trên mặt cầu. Ta đặt cây kim tại điểm xuất phát trên γ; với bánh xe được cố định, ta đánh dấu một cái nan hoa trên bánh xe và ghi nhớ vị trí của nó. Sau đó ta dẫn hướng mũi kim vòng quanh γ, mang nó trở về điểm xuất phát. Bằng cách đo góc α mà bánh xe vừa xoay, ta thu được diện tích A bên trong γ:

$$A = \alpha R^2 ,$$

trong đó R là bán kính của mặt cầu.

Để chính xác, góc α được định nghĩa như một bội số của 2π, và ta phải có chút cẩn thận hơn ở đây. Tuy nhiên, nếu γ được giới hạn trong một bán cầu, ta có thể chọn $0 < \alpha < 2\pi$.

11
BIẾN PHỨC THẬT LÀ ĐƠN GIẢN

11.1 Giới thiệu

Trong chương này tôi trình bày một phần lý thuyết về biến phức, bằng trực giác vật lý nhưng không có chứng minh chặt chẽ. Không đòi hỏi bạn đọc tiếp xúc trước với biến phức. Ý tưởng, được sử dụng ở quá nửa chương này, là liên kết hàm phức bất kỳ với một lưu chất lý tưởng chảy trên mặt phẳng (chi tiết ở mục 11.3). Nhờ vào ý tưởng này, một số khẳng định cơ bản trong lý thuyết hàm phức trở nên hiển nhiên.

Mục đầu tiên về số phức đòi hỏi một ít kiến thức cơ bản. Phần còn lại của chương có thể tiếp cận được với bất cứ ai đã nắm được khái niệm tích phân theo đường. Các khái niệm về toán tử div và toán tử curl được giải thích ở mức độ chúng được sử dụng.

Sau đây là vài điểm nổi bật.

1. Công thức tích phân Cauchy, một kết quả nền tảng, được chỉ ra như một dạng của luật bảo toàn khối lượng khác. Công thức phát biểu rằng: nếu lưu chất không nén được nào đó được sinh ra tại một điểm bên trong vùng, một lượng tương đương phải thoát ra khỏi biên của vùng

(mục 11.5).

2. Định lý ánh xạ Riemann, một trong số khẳng định quan trọng nhất của lý thuyết hàm phức, được thể hiện dưới dạng gần như hiển nhiên với một lập luận vật lý. Trong suốt một thời gian sau khi đã học định lý này, và có thể trình bày chứng minh của nó theo ai đó yêu cầu, tôi vẫn không thể thực sự lý giải được *tại sao* định lý lại đúng. Diễn giải vật lý ở mục 11.7 làm cho định lý trở nên rất đáng tin và nó có thể phiên dịch thành một chứng minh chặt chẽ.*

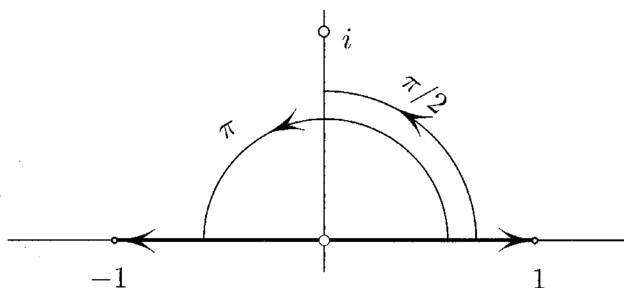
3. Cái rất đáng lưu tâm là công thức nổi tiếng $1+1/2^2+1/3^2+\cdots=\pi^2/6$ của Euler có thể phát biểu dưới dạng: đối với dòng chảy trên mặt phẳng của một lưu chất không nén được với nguồn và giếng hút, khối lượng sinh ra tại nguồn đúng bằng với khối lượng hấp thụ tại giếng hút (mục 11.8).

11.2 Số phức đã được phát minh như thế nào

Ôn lại tính nhân. Lần đầu được dạy rằng $(-1)\cdot(-1)=1$, tôi và vài người bạn học cảm thấy bối rối và nghĩ rằng: "Nếu âm là xấu, làm thế nào nhân hai "cái xấu" lại thành cái tốt?" Rất lâu sau tôi mới nhận ra rằng câu chuyện này có ý nghĩa hình học. Một số âm, được xem như một véc tơ trên đường thẳng, hợp thành một góc π với chiều dương của trục x: $\angle(-1)=\pi$, (hình 11.1); đối với một số dương góc này là bằng không: $\angle(1)=0$, hay, ta cũng có thể nói, bội số

* Các chi tiết của nó có thể được tìm thấy trong một cuốn sách xuất sắc của Nevanlinna và Paatero [NP].

nguyên của 2π.



Hình 11.1. $\angle(i.i) = \angle(i) + \angle(i) = \pi / 2 + \pi / 2 = \pi$, để mà i^2 là một số âm.

Quy tắc phép nhân, được diễn đạt một cách hình khối, phát biểu: "*Trong phép nhân, các góc cộng được thêm vào, trong khi các độ lớn được nhân lên.*"

Điều này hé lộ một quy tắc có vẻ như lạ lùng được phát biểu trước đó. Thực thế,

$$\angle((-1)\cdot(-1)) = \angle(-1) + \angle(-1) = \pi + \pi = 2\pi,$$

sao cho $(-1)\cdot(-1)$ nằm dọc theo chiều dương trục *x*, tức là, một số dương.

Giới thiệu số i. Vậy đâu là định nghĩa hợp lý của "số" *i* như là $i^2 = i\ .\ i = -1$*?* Quy tắc phép nhân được phát biểu ở trên gợi ra câu trả lời: bởi các góc cộng thêm trong phép nhân, và bởi $\angle(-1) = \pi$, ta trông chờ $\angle(i) = \pi / 2$! Điều này dẫn ta đến định nghĩa i như được chỉ ra trong hình 11.1, đơn giản như là điểm (0, 1) trong mặt phẳng.* Theo đó ta đã định nghĩa số phức đơn giản nhất, *i*. Một số phức tổng quát được định

* Cũng biện minh như vậy ta có thể nói $i = (0, -1)$. Sở dĩ không ghi vậy được bởi vì ác cảm tâm lý của chúng ta đối với những ký hiệu âm.

nghĩa là một điểm *(x, y)* trong mặt phẳng, được viết ra vì lý do truyền thống, vì tính tiện lợi, và theo cảm quan chung, như $z = x + iy$; phép nhân của những số phức được định nghĩa theo quy tắc phát biểu ở trên: các góc (hay *các đối số*) cộng thêm, và các độ dài (các khoảng cách đến gốc tọa độ) nhân lên. Chi tiết hơn có thể được tìm thấy trong bất kỳ cuốn sách nào về biến số phức, chẳng hạn cuốn [NP], [Sp].

11.3 Hàm số như dòng chảy lưu chất lý tưởng

Ý tưởng đơn giản nhưng không quá-hiển-nhiên sau đây tạo thành một trong các cầu nối giữa biến phức và vật lý:

Xem một hàm số f(z) như một trường véc tơ trong mặt phẳng, bằng cách gán cho từng điểm z, véc tơ $\overline{f(z)}$*, phức liên hợp** *của f(z) .*

Tại sao sử dụng một phức liên hợp? Lý do là trường véc tơ $\overline{f}$ có tính chất đáng lưu tâm sau:

Nếu f(z) là một hàm khả vi với một biến phức z, khi đó liên hợp của nó $\overline{f(z)}$*, xem như một trường véc tơ, có suất tiêu tán*** *(div) bằng không và vận tốc xoáy (curl) bằng không (được định nghĩa ở đoạn tiếp theo).*

Vận tốc xoáy (trường hợp hai-chiều). Vận tốc xoáy của một trường véc tơ $\mathbf{V} = \langle P(x, y), Q(x, y)\rangle$ tại một điểm z có thể được định nghĩa như sau. Tưởng tượng đánh dấu lưu chất bằng hai dấu gạch trực giao chéo nhau tại điểm z. Khi đó vận tốc xoáy V*(z)* là tổng của các vận tốc góc của hai dấu

---

* Nguyên do cho việc sử dụng một giá trị liên hợp được giải thích ngắn gọn.

** Suất tiêu tán được định nghĩa ở mục 7.3.

gạch này khi chúng bị cuốn đi dọc theo dòng chảy V. Theo đó vận tốc xoáy là (hai lần) vận tóc góc trung bình của lưu chất tại một điểm. Dễ dàng nhận thấy vận tốc góc của dấu gạch nằm ngang bằng $\frac{\partial Q}{\partial x}$ (điều này là hoàn toàn hiển nhiên, bởi đạo hàm này đo lường "độ lệch", đó là sự phụ thuộc của vận tốc phương dọc Q theo x); một cách tương tự, vận tốc góc của dấu gạch thẳng đứng là $-\frac{\partial P}{\partial y}$. Theo đó vận tốc xoáy:

$$\mathbf{V}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Theo làm đơn giản thuật ngữ, lưu chất hai-chiều bất kỳ chảy trên mặt phẳng với vận tốc $\mathbf{V}(z) = \overline{f(z)}$ tại z có hai tính chất sau: (i) khi một phần lưu chất tùy ý bị cuốn đi, diện tích của phần đó không thay đổi, và (ii) "vận tốc góc" của lưu chất là bằng không tại mọi điểm. Lưu chất như vậy được gọi là *lý tưởng*.

Cái đáng lưu tâm là tất cả các hàm số* ta học trong trường phổ thông và trong giải tích đều có diễn giải dạng lưu chất này! Tính khả vi tải nhiều ý nghĩa vật lý hơn là người ta tưởng.

Vì sao mà vận tốc xoáy $\overline{f(z)} = \operatorname{div} \overline{f}(z) = 0$ ***?*** Sự triệt tiêu của suất tiêu tán và vận tốc xoáy của $\overline{f(z)}$ thường được biết đến như là hệ phương trình Cauchy-Riemann và cách chứng minh của nó có thể tìm thấy được trong bất kỳ giáo trình nào về biến.** Thay vì một chứng minh, đây là một giải thích hình học (mà có thể phiên dịch thành chứng minh chặt chẽ

---

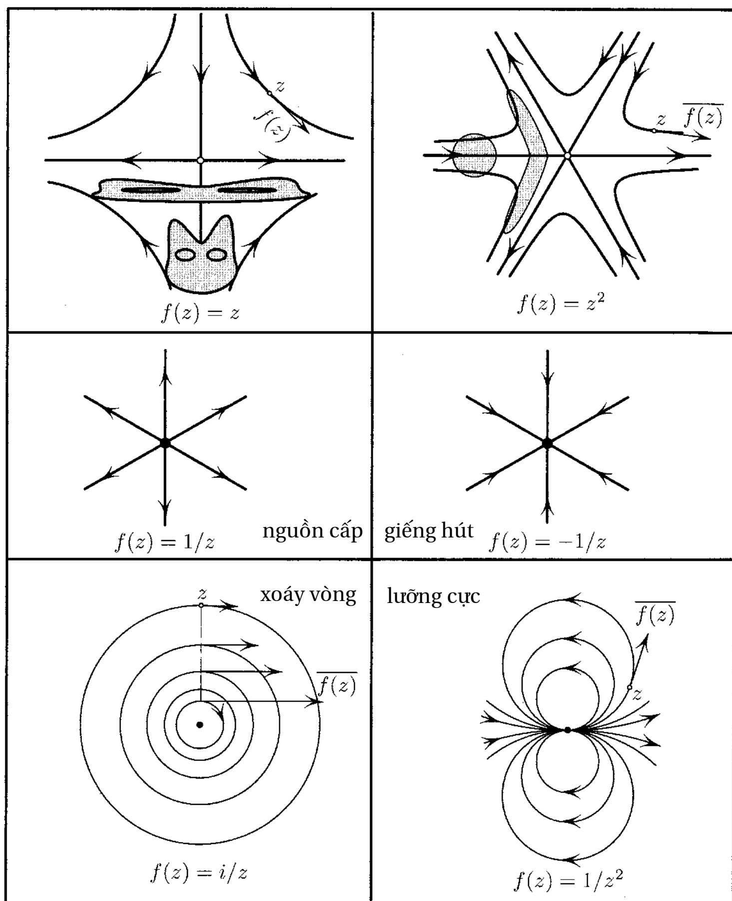
* Với một ngoại lệ hiếm hoi, như là $y = |x|$.

** Ví dụ, cuốn [NP], cuốn [Sp]

với một chút cố gắng). Bởi ta có thể dời gốc tọa độ tới điểm bất kỳ, thế nên giải quyết trường hợp $z = 0$ là đủ. Bởi f là khả vi, ta có $f(z) = cz + \varepsilon$, trong đó ε là kí hiệu số hạng bậc cao của biến z tức là $\varepsilon / z \to 0$ khi $z \to 0$. Thế nên, không làm mất đi tính tổng quát nếu ta giả định rằng f là tuyến tính: $f(z) = cz = az + ibz$, trong đó a và b là số thực. Điểm cốt lõi là chứng tỏ rằng cả $\overline{z}$ và $i\overline{z}$ đều có suất tiêu tán bằng không và vận tốc xoáy bằng không. Hình 11.2 làm cho mọi việc khá rõ ràng rằng đây quả thực là bài toán cần giải quyết. Chẳng hạn, div $\overline{z} = 0$ được nhận thấy từ nhận định sự thu nhỏ của một hình vuông tâm đặt tại gốc tọa độ theo phương y bù lại bằng chính sự giãn ra của nó theo phương x.

Bài toán. *Trong dòng chảy xoáy tương ứng $f = i/z$ (hình 11.2), mọi phần tử lưu chất quay quanh gốc tọa độ theo đường tròn. Khi đó làm sao vận tốc xoáy, vốn thể hiện vận tốc góc lân cận của lưu chất, lại có thể bằng không?*

Trả lời. Một mũi tên nhỏ tiếp tuyến với đường tròn đúng là xoay theo chiều kim đồng hồ. Tuy nhiên, không nên bỏ qua việc các mũi tên trực giao xoay *ngược chiều kim đồng hồ* vì vận tốc giảm khi ta dời ra xa góc tọa độ. Tổng của hai vận tốc góc (vận tốc xoáy) thực ra là bằng không, như rút ra từ nguyên lý tổng quát, hoặc như có thể xác minh bằng tính toán trực tiếp.



Hình 11.2. Mỗi hàm số *f(z)* sinh ra một trường véc tơ $\overline{f(z)}$. Nếu f' tồn tại, dòng chảy tương ứng là không quay và không nén được. Một vòng tròn rỗng tại gốc tọa độ biểu thị vận tốc bằng không; một chấm đen biểu thị một điểm kì dị với tốc tộ dòng chảy gần bên tiệm cận vô cực.

11.4 Ý nghĩa vật lý của tích phân phức

Tích phân $\int_C f(z)dz$ của một hàm số phức f dọc theo một đường cong khép kín* C có một diễn giải đẹp, kết hợp hai khái niệm vật lý trong một kí hiệu ngắn:

$$\int_C f(z)dz = \text{Lưu số}_C\ \overline{f} + i\ \text{Thông lượng}_C\ \overline{f}. \quad (11.1)$$

Ở đây lưu số của một trường véc tơ trên miền C được định nghĩa như tích phân của thành phần tiếp tuyến và thông lượng được định nghĩa như là tích phân của thành phần pháp tuyến hướng ra ngoài của V:

$$\text{Lưu số}_C\ \mathbf{V} \overset{\text{def}}{=} \int_C \mathbf{V}\cdot\mathbf{T}\,ds,\ \text{Thông lượng}_C\ \mathbf{V} \overset{\text{def}}{=} \int_C \mathbf{V}\cdot\mathbf{N}\,ds,$$

trong đó T và N là các véc tơ pháp tuyến và tiếp tuyến đơn vị của C, và · kí hiệu tích vô hướng.

Sau đây là một chứng minh ngắn cho đẳng thức (11.1). Gọi $f = u + iv,\ dz = dx + idy$. Bỏ qua một vài biến đổi số học, ta có:

$$f\ dz = \langle u, -v\rangle \cdot \langle dx,\ dy\rangle + i\langle u,\ -v\rangle \cdot \langle dy,\ -dx\rangle$$

(như trên, · kí hiệu tích vô hướng của hai véc tơ), hay

$$f\ dz = \overline{f}\cdot\mathbf{T}ds + \overline{f}\cdot\mathbf{N}ds.$$

Lấy tích phân dẫn ra (11.1).

---

* Ta không đưa ra điều kiện cụ thể mà C phải thỏa. Với yêu cầu này ta chỉ cần xem C như một đường con kín bằng phẳng không tự-cắt là đủ.

Định lý Cauchy-Goursat. Cho đến đây ta chưa áp đặt giả thiết khả vi nào có trên f. Nếu bây giờ giả sử f khả vi, $\mathbf{V} = \overline{f}$ sẽ trở thành một trường vectơ không tiêu tán và không xoáy.* Khi đó ta kết luận rằng Lưu số$_C\ \mathbf{V} =$ Thông lượng$_C\ \mathbf{V} = 0$ (định lý Green, mục 7.3), và (11.1) suy ra kết quả là định lý Cauchy-Goursat:

Nếu f là hàm giải tích ở trên và trong miền C, khi đó:

$$\int_C f(z)\,dz = 0\,.$$

Như một sự minh họa lưu chất của định lý, lưu số và thông lượng của bất cứ lưu chất nào truyền đi trong hình 11.2 triệt tiêu, *miễn sao chu tuyến C không bao quanh điểm kì dị* (điểm tại đó f là không khả tích, là điểm $z = 0$ trong bốn ví dụ gần nhất).

11.5 Công thức tích phân Cauchy thông qua dòng chảy lưu chất

Công thức tích phân Cauchy cho biết giá trị của một hàm số khả tích f tại điểm bất kỳ z_0 *bên trong* một đường cong khép kín C tính theo các giá trị của f trên C:

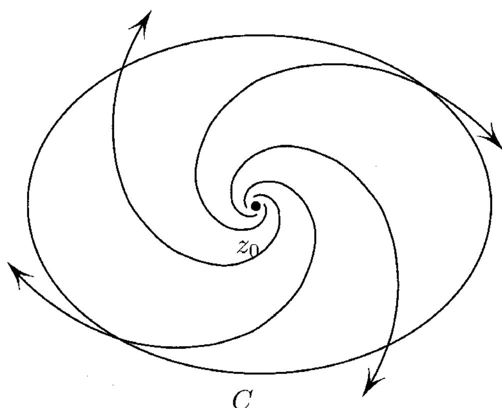
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz\,. \qquad (11.2)$$

Công thức này không hoàn toàn hiển nhiên với hầu hết chúng ta. Phát biểu vật lý tương đương sau đây có tính trực quan hơn nhiều.

---

* Dẫn theo nhận xét trọng yếu ở trang 150.

Ý nghĩa vật lý của công thức tích phân Cauchy. *Khảo sát một dòng lưu chất lý tưởng trong mặt phẳng với một điểm*[*] *nguồn-xoáy tại* $z = z_0$ *(hình 11.3). Khi đó (i) lượng lưu chất sinh ra mỗi giây tại nguồn bằng lượng lưu chất mỗi giây băng qua biên* C *và (ii) lưu số xung quanh một đường tròn vô cùng bé bao quanh điểm kỳ dị* z_0 *đúng bằng lưu số xung quanh* C.



Hình 11.3. Một phác họa của dòng chảy $\overline{f(z)/(z-z_0)}$ tương ứng hàm lấy tích phân của (11.2).

Tầm quan trọng vật lý của vế bên phải (11.2). Theo (11.1),

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \text{Lưu số} + i\,\text{Thông lượng}, \qquad (11.3)$$

trong đó lưu số và thông lượng tương ứng trường véc tơ được

* Một cách trực quan, có thể nghĩ về một lớp nước mỏng xoáy hụt xuống một giếng hút (bức tranh của chúng ta cho thấy chuyển động đó theo hướng ngược lại). Tất nhiên, giếng hút không phải là một ví dụ tốt bởi có ma sát với đáy, độ dày của các lớp nước thay đổi, vân vân.

cho theo liên hợp của hàm lấy tích phân. Ta hãy thử hình dung bản chất của dòng chảy đó. Theo công thức Taylor, $f(z) = f(z_0) + (z - z_0)g(z)$, và hàm lấy tích phân trở thành:

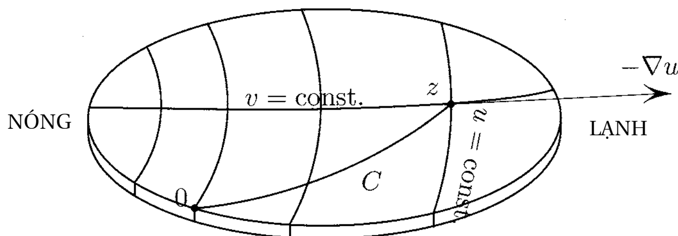
$$\frac{f(z)}{z - z_0} = \frac{f(z_0)}{z - z_0} + g(z) = A\frac{1}{z - z_0} + B\frac{i}{z - z_0} + g(z),$$

trong đó $A + iB = f(z_0)$. Ta phát hiện rằng dòng chảy tương ứng hàm số này là một chồng chập của nguồn cấp $\overline{1/(z - z_0)}$, xoáy nước $\overline{i/(z - z_0)}$, và một dòng chảy không nén được $\overline{(g(z))}$. Sự kết hợp được phác ra trong hình 11.3.

Chỉ có đại lượng nguồn cấp góp phần vào giá trị thông lượng, $2\pi A$, và có đại lượng xoáy góp phần vào giá trị lưu số, $-2\pi B$, như giải thích theo hình 11.2. Do $\overline{g(z)}$ là không quay và không nén được khắp miền khảo sát, nó không góp phần vào giá trị nào cả. Theo đó (11.3) chuyển thành:

$$\int_c \frac{f(z)}{z - z_0}dz = -2\pi B + i2\pi A = 2\pi i(A + iB) = 2\pi i f(z_0).$$

Đến đây ta đã hoàn tất diễn giải của công thức tích phân Cauchy.



Hình 11.4. Dựng nên một hàm khả tích $f = u + iv$ từ một phân bố nhiệt độ.

11.6 Dòng truyền nhiệt và hàm giải tích

Có một diễn giải vật lý đáng lưu tâm khác của một hàm giải tích, bên cạnh điều tôi đã nêu ở trên. Nếu đã làm quen với toán tử gradient bạn sẽ hiểu rõ mục này hơn.

Phần thực u của hàm giải tích bất kỳ:

$$f(z) = u(x,\ y) + iv(x,\ y)$$

có thể được ví như một chỉ số nhiệt độ ổn định của một cái đĩa, như là một tấm kim loại mỏng, trong khi phần ảo v có thể được ví như thông lượng nhiệt truyền qua đường cong nối điểm cho trước O với *(x, y)*. Cụ thể là như sau.

Xem xét một đĩa phẳng mỏng dẫn nhiệt không đáng kể (hình 11.4) ví dụ như là một tấm đồng, phẳng, mỏng. Mặt trên và mặt dưới của đĩa được cách nhiệt, và nhiệt chỉ có thể truyền vào hay truyền ra qua vành đĩa. Bằng cách cố định nhiệt độ vành và chờ một thời gian đủ lâu, ta thu được một phân bố nhiệt độ ổn định; gọi $u(x,\ y)$ là nhiệt độ tại *(x,y)*. Hình vẽ cho thấy các đường nhiệt độ không đổi (đẳng nhiệt), dọc theo đường gân của "những phần tử truyền nhiệt" – hay cụ thể hơn, một đường thẳng vuông góc với từng đường đẳng nhiệt.

Ta giả định rằng thông lượng nhiệt là $-\nabla u$. Điều này có nghĩa là lượng nhiệt truyền qua một đoạn thẳng vô cùng bé ds có véc tơ pháp tuyến N đúng bằng $-\nabla u \cdot \mathbf{N}ds$. Nói cách khác, ta đang chấp nhận độ dẫn nhiệt của cái đĩa là đẳng hướng và có độ lớn là 1.

Định luật bảo toàn năng lượng áp đặt một tính chất đặc biệt lên u. Thực vậy, lượng nhiệt tổng cộng truyền vào miền con bất kỳ là bằng không:

$$\int_{\gamma} \nabla u \cdot \mathbf{N}\, ds = 0\,, \qquad (11.4)$$

trong đó $\mathbf{N}$ là véctơ pháp tuyến đơn vị của γ, đối với đường cong khép kín γ bất kỳ.

Để định nghĩa $\upsilon(x, y)$, ta hãy nối một điểm tùy định $z = x + iy$ với một điểm cho trước O nhờ đường cong C, và gọi υ là nhiệt lượng truyền qua C:

$$\upsilon(x, y) = \int_{C} \nabla u \cdot \mathbf{N}\, ds\,. \qquad (11.5)$$

Tích phân không phụ thuộc vào đường cong C nhờ vào tính chất (11.4).

Ta bấy giờ khẳng định rằng $f = u + i\upsilon$ *là một hàm khả tích.*

Phác họa chứng minh. Lấy tích phân (11.5) theo từng biến và sử dụng đường không phụ thuộc tích phân đó, thu được $\upsilon_x = u_y,\ \upsilon_y = -u_x$. Điều này là tương đương phát biểu rằng $\operatorname{div} \overline{f} = \operatorname{rot} \overline{f} = 0$, mà là đặc tính của một hàm số giải tích (mục 11.3).

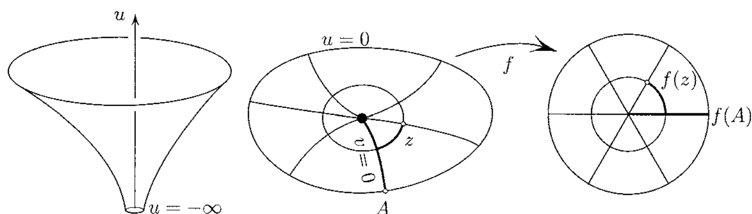
Bài tập. *Lý giải bằng một lập luận tự nghiệm trực tiếp vì sao mối liên hệ* $\upsilon_x = u_y,\ \upsilon_y = -u_x$ *vẫn đúng.*

11.7 Định lý ánh xạ Reimann cho bởi dòng truyền nhiệt

Tôi không coi lập luận dưới đây là một chứng minh chặt chẽ của định lý ánh xạ Riemann mà chỉ có ý định làm cho nó

trở nên hiển nhiên một cách trực quan. Những chi tiết chặt chẽ bị bỏ qua ở đây có thể được tìm thấy trong cuốn [NP].

Kiến thức cơ bản cho lập luận này là khái niệm gradient.



Hình 11.5. Nhiệt truyền vào qua biên của ***D*** và biến mất trong những giếng hút ở vận tốc *2π* cal/giây.

Định lý ánh xạ Riemann.* *Gọi D là miền mở trong mặt phẳng phức được giới hạn bởi một đường cong kín đơn C, và gọi z_0 là một điểm trong miền D. Tồn tại một hàm giải tích f mà ánh xạ 1-1 D lên một hình đĩa đơn vị, với $f(z_0) = 0$ và $f'(z_0) > 0$.*

Xác lập mô hình vật lý. Xét một cái đĩa truyền-nhiệt đều D như được mô tả trong hình 11.6. Ta giữ vành đĩa tại nhiệt độ $u = 0$, và giữ lạnh một cái đĩa vô cùng nhỏ tại gốc tọa độ đến nỗi mỗi giây có *2π* calory truyền qua đường cong kín bất kỳ bao quanh đĩa. Nhiệt độ được coi là vẫn ổn định và không thay đổi theo thời gian.

* Phiên bản này của định lý là yếu hơn phát biểu tổng quát nhất, cái chỉ đòi hỏi tính đơn liên của *D* (xem [NP]). Ánh xạ *f* trong định lý là độc nhất, như bổ đề Schwarz ngầm chỉ, nhưng ở đây ta chỉ quan tâm sự tồn tại của nó.

Hệ đẳng nhiệt. Với mỗi điểm z trong miền D bây giờ ta gán cho hai chỉ số: nhiệt độ của nó u, và nhiệt lượng truyền qua một đường cong từ A đến z (hình 11.5), trong đó A là một điểm cho trước và cố định. Nhiệt lượng $\upsilon(z)$ này được xác định thông qua (11.5). Tuy nhiên, đường cong Az có thể quay vài vòng quanh góc tọa độ, và theo đó $\upsilon(z)$ được xác định là chỉ tuần hoàn 2π, bởi mỗi vòng tăng thêm sẽ lấy đi nhiệt lượng 2π. Hàm đa-trị $\upsilon(z)$ có thể được xem như một dạng của biến số góc. Bây giờ, cái ánh xạ Riemann mà ta muốn chỉ đơn giản là:

$$f(z) = e^{u(z)+i\upsilon(z)}.$$

Thực thế,

1. f là đơn-trị bất chấp sự thực rằng υ được xác định đến 2π, bởi $e^{2\pi i} = 1$.
2. Với z nằm trên biên của D ta có $\left|f(z)\right| = \left|e^{0+i\upsilon}\right| = 1$.
3. $f(0) = e^{-\infty+i\upsilon} = 0$.

Để có được $f'(0) > 0$ ta chọn điểm A (hình 11.5) có quĩ đạo $\upsilon = 0$ hướng vào tâm theo phương vuông góc với trục x.

Cái thiếu chặt chẽ. Một vài "chi tiết" chặt chẽ đã bị lờ đi; trong đó quan trọng nhất là sự tồn tại của phân bố nhiệt độ u. Sự tồn tại của phân bố u này, được gọi là *Hàm số Green* của miền, là tương đương sự tồn tại của một cách giải cho bài toán Dirichlet – một bài toán được thảo luận trong hầu hết tất cả tài liệu về phương trình vi phân riêng; ví dụ xem cuốn [CH].

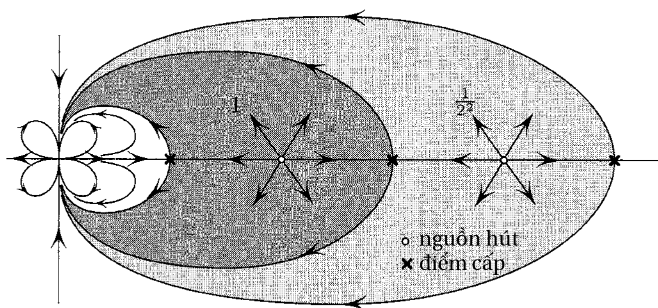
11.8 Tính tổng Euler bằng dòng lưu chất

Mục tiêu của tôi trong mục này là chỉ ra bức tranh đằng sau công thức Euler. Không có chứng minh nào được trình bày; chúng có thể được tìm thấy trong phần lớn giáo trình về biến phức, ví dụ như cuốn [Sp].

Bằng cách thử những hàm số $f(z)$ khác nhau ta có thể khảo sát các trường vận tốc $\overline{f(z)}$ thu được. Một trường vận tốc như vậy, tương ứng hàm số:

$$f(z) = \frac{\cot \pi z}{2z^2}, \tag{11.6}$$

được chỉ ra trong hình 11.6.



Hình 11.6. Nhiệt lượng định nghĩa theo (11.6). Mỗi điểm số nguyên n tạo ra $\frac{1}{n^2}$ đơn vị lưu chất mỗi giây. Gốc tọa độ hấp thụ $\pi^2 / 3$ đơn vị lưu chất mỗi giây.

Tại gốc tọa độ, lưu chất được đẩy ra theo phương x và hấp thụ theo phương y.* Một tính toán (sử dụng chuỗi

* Vận tốc tiến tới vô cực tại lân cận gốc tọa độ. Mô hình dòng được cho thấy ở đây được gọi là tứ cực.

Taylor) mà tôi lược bỏ qua chỉ ra rằng sự hấp thụ mạnh hơn một lượng $\pi^2/3$. Điều này nghĩa là thông lượng qua một đường tròn nhỏ bao quanh gốc tọa độ là $-\pi^2/3$. Mặt khác, mỗi điểm nguyên $z = n = \pm 1 = \pm 2, \ldots$, là một nguồn cấp có cường độ $\frac{1}{n^2}$. Như hình vẽ gợi ra, tất cả lưu chất đi ra từ các nguồn cấp về gốc tọa độ, và do đó:

$$\frac{\pi^2}{3} = 2\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots\right),$$

trong đó sự có mặt của thừa số 2 suy ra từ việc các nguồn cấp hợp thành những cặp đối xứng $\pm n$. Chia cho 2 ta có được công thức Euler:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}. \qquad (11.7)$$

PHỤ LỤC
KIẾN THỨC VẬT LÝ CẦN THIẾT

Phụ lục ngắn này bao gồm những bộ đồ nghề vật lý được sử dụng xuyên suốt cuốn sách.

A.1 Lò xo

Bộ đồ nghề cho những thí nghiệm giả tưởng của chúng ta bao gồm hai loại lò xo: lò xo tuyến tính và lò xo có lực căng hằng số.

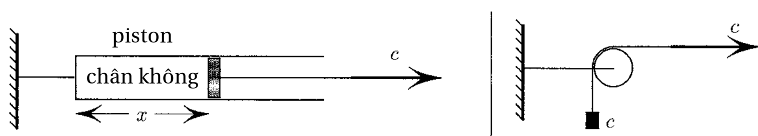
Lò xo đàn hồi chặt. Một lò xo đàn hồi chặt là lò xo có lực căng tỉ lệ trực tiếp với độ dài của nó: kéo căng một lò xo như vậy đến một độ dài x đòi hỏi một lực kx. Ở đây k là một hằng số (được gọi là hằng số Hooke), đặc trưng cho mỗi lò xo cụ thể. Giá trị k nhỏ nghĩa là lò xo lỏng, trong khi k lớn nghĩa là lò xo cứng. Lưu ý rằng độ dài nghỉ của loại lò xo này bằng không.

THẾ NĂNG CỦA MỘT LÒ XO ĐÀN HỒI CHẶT. Theo định nghĩa, thế năng của một lò xo là công cần thiết để kéo giãn lò xo từ độ dài nghỉ (ở đây là bằng không) đến độ dài x. Công này có thể tính được bằng (lực kéo trung bình do tay tôi tác

động) $\times$(khoảng cách x mà tay tôi di chuyển). Lực kéo trung bình được cho theo $\frac{1}{2}(0+kx)=\frac{1}{2}kx$, và theo đó thế năng là

$$P(x)=\frac{1}{2}kx^2.$$

Thay vì vậy, có thể tính công này như tích phân của lực theo khoảng cách: $P(x)=\int_0^x (kx)ds=\frac{1}{2}kx^2$.



Hình A.1. Hai mô hình thực tế của một lò xo lực căng hằng số.

Lò xo có lực căng hằng số. Lò xo có lực căng không phụ thuộc vào độ giãn của nó được gọi là *lò xo có lực căng hằng số*. Cái lò xo lạ lùng này có thể được làm từ một piston trượt không ma sát trong một ống xy lanh bị bịt kín một đầu, với chân không bên trong, như cho thấy trong hình A.1. Một mô hình thực tế khác, được chỉ ra trong hình A.1, bao gồm quả nặng c với cái ròng rọc.

THẾ NĂNG CỦA MỘT LÒ XO LỰC CĂNG HẰNG SỐ. Theo định nghĩa, thế năng là công cần có để kéo giãn lò xo từ một độ dài tham chiếu, mà ta chọn là bằng không, đến một độ dài cho trước. Công này bằng lực kéo c nhân cho khoảng cách x:

$$E=cx.$$

A.2 Màng xà phòng

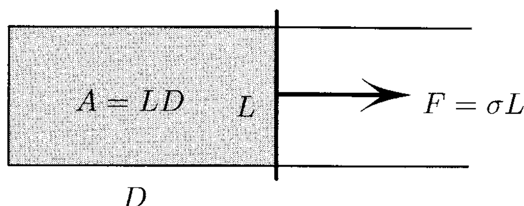
Màng xà phòng là mô phỏng hai chiều của lò xo có lực căng hằng số. Một màng xà phòng như là tường của một bong bóng xà phòng có một tính chất kỳ lạ: trong thế giới lý tưởng hóa của chúng ta, sức căng bề mặt của bong bóng xà phòng không thay đổi khi ta làm giãn ra hay co lại cái màng lý tưởng. Như khi ta thổi phồng một bóng xà phòng, sức căng bề mặt của nó không đổi.

Sức căng bề mặt, theo định nghĩa, là lực cần có để giữ nguyên dạng một khe hở có độ dài đơn vị. Nếu ta hình dung việc khâu khe hở, lực làm giữ nguyên dạng này là tổng sức căng của tất cả dây chỉ trong đường khâu. Với màng xà phòng, sức căng bề mặt là đẳng hướng. Điều này có nghĩa rằng sự định hướng của khe hở không ảnh hưởng gì đến sức căng bề mặt. Trong khi đó, sức căng dị hướng xuất hiện ở hầu hết các bề mặt như da, màng nhựa cao su, vách của ống nén, bánh xe, và các vật liệu phủ.

Thế năng của một màng xà phòng tỉ lệ thuận với diện tích màng A:

$$E = \sigma A, \tag{A.1}$$

trong đó s là sức căng bề mặt. Mối liên hệ này khiến màng xà phòng trở nên hữu dụng trong việc giải quyết những bài toán tối thiểu hóa diện tích. Để minh chứng mối liên hệ (A.1), xét cái khung trong hình A.2; thanh thẳng trượt dọc theo khung, kéo màng xà phòng về phía sau. Nếu L là độ dài phần của thanh thẳng tiếp xúc với màng, lực cần có để di chuyển nó là $F = \sigma L$.



Hình A.2. Thế năng của một màng xà phòng với sức căng bề mặt không đổi σ là σA .

(Một cách tương đương, cũng có thể nghĩ về một ống xy lanh với một piston chuyển động về hai hướng, với chân không bên trong và với áp lực σ bên ngoài.) Theo định nghĩa, năng lượng của hệ bằng với công cần có để kéo thanh đó từ vị trí tham chiếu, mà ta chọn là vị trí diện tích bằng không. Để kéo thanh (hay piston) một khoảng D sẽ tốn công

$$E = \sigma L \ . D = \sigma A ,$$

minh chứng cho nhận định.

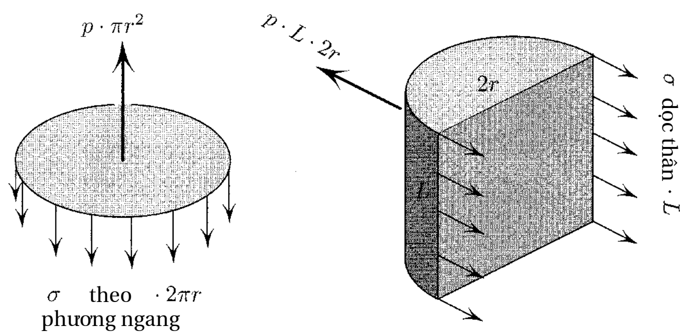
Bài toán. *Các ống dẫn bị đông đá luôn luôn nứt gãy dọc thân. Vì sao?*

Lời giải. Ta sẽ thấy sức căng dọc thân trong xylanh bị nén lớn gấp hai lần sức căng theo phương đường kính. Ta hãy so sánh các lực cần có để giữ nguyên dạng một vết nứt dọc thân so với một vết nứt ngang (hình A.3).

Gọi p là áp lực bên trong ống; ta giả sử nó là đẳng hướng. (Thật thà mà nói, ta thực sự đang giải thích tại sao một ống dẫn với lưu chất bị nén, chữ không phải ống bị đóng băng, sẽ bị nứt gãy dọc thân.) Nếu ta cắt ống dẫn dọc theo đường

kính (hình A.3) sẽ tốn lực $p \cdot \pi r^2$ để giữ mặt cắt nguyên khối chống lại áp lực p lên diện tích πr^2. Lực này được mang trên độ dài $2\pi r$ của mặt cắt, cho nên giá trị lực trên một đơn vị chiều dài là:

$$\sigma_{\text{theo phương ngang}} = \frac{p\pi r^2}{2\pi r} = \frac{1}{2} pr \cdot$$



Hình A.3. Cân bằng lực dọc theo ống dẫn và cắt ngang ống dẫn.

Nếu ta cắt ống dẫn dọc theo hai đường sinh với độ dài L mỗi đường (hình A.3), một lực có độ lớn $p \times (L \times 2r)$ sẽ cần có để giữ khe nứt nguyên dạng chống lại áp lực lên diện tích của tiết diện hình chữ nhật $L \times 2r$. Chia cho một đơn vị diện tích của vết nứt ta có:

$$\sigma_{\text{dọc thân}} = \frac{p \times (L \times 2r)}{2L} = pr\ .$$

Ta nhận ra rằng $\sigma_{\text{dọc thân}} = 2\sigma_{\text{theo phương ngang}}$. Ống dẫn nứt gãy dọc thân vì sức căng dọc theo đường sinh của hình trụ là gấp hai lần sức căng dọc theo đường kính của nó.

A.3 Khí nén

Để phục vụ cuốn sách này ta chỉ xem xét một mô hình đơn giản của khí có *áp suất p không đổi ngay cả khi bình chứa thay đổi kích thước:* $p = \text{constant}$. Có nghĩa đây là một chất khí giả tưởng, một thứ tương tự như màng xà phòng, ngoại trừ là sức căng σ có giá trị âm, nghịch đối với áp lực: $p = -\sigma, \sigma < 0$.

Thế năng của khí nén. Xem xét một vùng phẳng D bơm đầy một chất khí hai-chiều. Nhắc lại rằng ta giả sử áp suất không đổi khi vùng phẳng thay đổi diện tích. Thế năng của hệ này là $-pA$. Chứng minh nhận định này chỉ là lặp lại nguyên văn của lập luận tương ứng cho sức căng bề mặt.

Tương tự như thế, thế năng của một vùng ba chiều có thể tích V, bơm đầy khí tại áp lực p, là $-pV$.

A.4 Chân không

Tưởng tượng một vùng trên mặt phẳng, với chân không bên trong và khí nén ở áp lực p bên ngoài. Cần một công pA để tạo thành một cái bong bóng chân không như vậy, trong đó A là diện tích của vùng. Thực vậy, xem xét một piston có chiều dài L trong xi-lanh, như trong hình A.2. Lực $F = pL$ là cần thiết để di chuyển piston; để di chuyển piston này một khoảng D tốn công $FD = pLD = pA$. Điều này chứng tỏ rằng động năng của bong bóng là:

$$E = pA,$$

ít ra cho một bong bóng hình chữ nhật. Bất kỳ hình dạng nào

khác đều có thể được xấp xỉ ở các mức độ chính xác tùy ý bằng những hình chữ nhật nhỏ, và kết quả ở trên vẫn đúng.

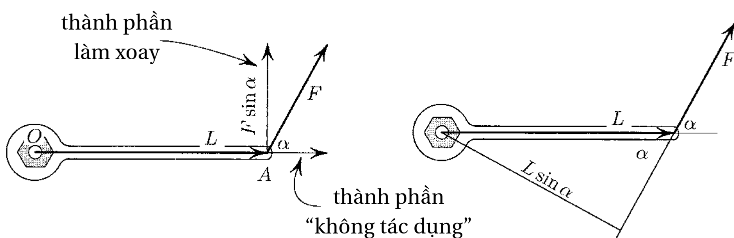
Một bong bóng hai-chiều chịu áp lực xung quanh bằng p tương đương về mặt toán học với một màng xà phòng với sức căng bề mặt $\sigma = p$.

Lập luận này áp dụng cho không gian ba chiều và cho cùng một kết quả: thế năng của một bong bóng chân không có thể tích V chịu áp lực xung quanh bằng p, đúng bằng công cần thiết để tạo thành một bong bóng như vậy, và nó tỉ lệ thuận với thể tích:

$$E = pV. \quad (A.2)$$

A.5 Moment quay

Định nghĩa. Xem xét một lực F tác dụng vào điểm A, và O là điểm chọn trước, gọi là điểm trục. *Moment quay* của lực F quanh trục O là tích véctơ $\mathsf{T} = \mathsf{L} \times \mathsf{F}$, trong đó $\mathbf{L} = \overline{OA}$ là vị trí tương đối của A tới O, gọi là *cánh tay đòn*. Moment quay cũng được nhắc đến như là *moment* của lực **F** quanh điểm trục O.



Hình A.4. Độ lớn của moment quay $(F \sin\alpha)L = F(L\sin\alpha) = \|\mathbf{F}\times\mathbf{L}\|$. Hướng của moment quay là chỉ ra khỏi mặt giấy về phía người đọc. Đây là hướng chuyển động của đai ốc dọc theo bu-loong với đường ren hướng-bàn-tay-phải.

Định nghĩa này vừa khít hoàn toàn với cảm nhận của ta về "cường độ xoay."* Hình dung ta đang cố xoay một đai ốc bị kẹt với cái khóa vặn. Chỉ thành phần của $\mathbf{F}$ trực giao với tay cầm $\mathbf{L}$ là có ích. Độ lớn của thành phần này là $F\sin\alpha$. Không chỉ lực, tuy nhiên, mà còn độ dài L cũng ảnh hưởng đến cường độ của việc xoay. Trong thực tế, cái thực sự có ý nghĩa cho việc làm đai ốc hết kẹt là tích số $(F\sin\alpha)L$. Điều này giải thích cho tính hợp lý của định nghĩa về độ lớn của moment quay bằng $T = \|\mathbf{L}\times\mathbf{F}\| = L(F\sin\alpha)$. Nhưng cũng có một trục tự nhiên – cái mà bu-loong có xiết đai ốc trên nó, vuông góc với cả **L** và **F**. Cũng có một phương tự nhiên dọc theo trục này: phương mà đai ốc sẽ di chuyển nếu nó hết kẹt; đường ren trên bu-loong được coi như hướng-bàn-tay-phải theo quy ước thông thường.

A.6 Trạng thái cân bằng của một vật rắn

Trong phạm vi thảo luận của chúng ta, một vật rắn là một tập hợp của một số hữu hạn của những chất điểm m_k có khoảng cách cố định với nhau.

Áp dụng định luật 1 của Newton cho một vật rắn dẫn đến nhận định sau:

Định lý 1. Nếu một vật ở trong trạng thái cân bằng, tổng tất cả lực và tổng tất cả moment quay (quanh một trục quay nào đó) tác động lên vật phải bằng không.

---

* Ta tránh thuật ngữ "**lực** xoay" bởi vì điều có ý nghĩa không phải là lực mà đúng hơn là tích số của lực và cánh tay đòn. Thậm chí một lực bé tí cũng có thể xoay một đai ốc xiết chặt với cánh tay đòn đủ lớn.

Nếu tổng lực là $\sum \mathbf{F}_k = \mathbf{0}$ ta có thể chọn trục quay nào cũng được bởi vì khi đó tổng moment quay không có phụ thuộc vào sự lựa chọn trục quay. Thực thế, gọi $\mathbf{r}_k$ là véc tơ vị trí của chất điểm tới gốc tọa độ, và $\mathbf{a}$ là véc tơ vị trí của trục quay. Khi đó tổng moment quay quanh **a** cũng y như tổng moment quay quanh gốc tọa độ:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_A &= \sum \mathbf{F}_k \times (\mathbf{r}_k - \mathbf{a}) = \sum \mathbf{F}_k \times \mathbf{r}_k - \left(\sum \mathbf{F}_k\right) \times \mathbf{a} \\ &= \sum \mathbf{F}_k \times \mathbf{r}_k = \mathbf{T}_O,\end{aligned}$$

như đã khẳng định. Nhận xét đơn giản sau đây đã được sử dụng trong vài bài toán tìm cực tiểu trong hình học.

Bổ đề về ba lực đồng quy. Nếu vật dưới ảnh hưởng của ba lực là trong trạng thái cân bằng, khi đó các đường biển diễn của những lực này là đồng quy (nghĩa là, các đường biểu diễn này chạy qua cùng một điểm).

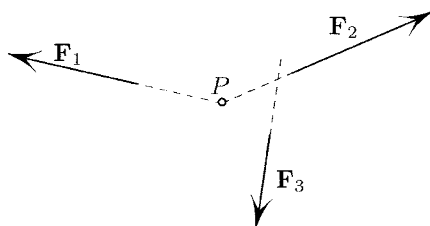
Chứng minh. Tổng moment quay quanh điểm trục bất kỳ là bằng không, dẫn theo nhận xét ở trên. Ta hãy chọn giao điểm* *P* của các đường biểu diễn của $\mathbf{F}_1$ và $\mathbf{F}_2$ (hình A.5) làm trục quay. Với lựa chọn này, các moment quay của $\mathbf{F}_1$ và $\mathbf{F}_2$ quanh *P* bằng không. Bởi tổng tất cả moment quay bằng không, moment quay của $\mathbf{F}_3$ quanh *P* cũng bằng không. Nhưng điều này có nghĩa là đường biểu diễn của $\mathbf{F}_3$ đi ngang qua *P*, chứng tỏ rằng ba đường biểu diễn là đồng quy.

---

* Có thể xảy ra trường hợp rằng hai đường thẳng song song, khi đó P ở vô cùng. Chứng minh vẫn đúng nếu ta hiệu chỉnh ngôn từ của ta, bằng cách quy dẫn ba đường thẳng song song đồng quy (tại vô cùng).

A.7 Động lượng góc

Động lượng góc là đại lượng mô phỏng ở dạng quay của động lượng truyền thẳng. Với một chất điểm m chuyển động với vận tốc v trên đường tròn bán kính r trong mặt phẳng, động lượng góc được định nghĩa là $mv \cdot r$. Nhưng giả như chất điểm di chuyển theo một cách nào khác, như trên đường thẳng, thì sao? Trong trường hợp đó, định nghĩa vẫn như vậy, ngoại trừ thay v bởi thành phần vận tốc vuông góc với véc tơ vị trí của hạt. Sau đây là định nghĩa cụ thể.



Hình A.5. Moment quay tổng cộng quanh P là khác không nếu các đường biểu diễn lực là không đồng quy.

Định nghĩa. Gọi $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ là véc tơ vị trí của chất điểm P có khối lượng m chuyển động xung quanh điểm O trong không gian. Động lượng góc $\mathbf{L}$ của P quanh O được định nghĩa là tích số chéo của các véc tơ vị trí và động lượng truyền thẳng:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}},$$

trong đó $\dot{\mathbf{r}}$ viết tắt cho $d\mathbf{r}/dt$. Bằng cách đạo hàm hai vế, ta thu được một mô phỏng dạng quay của định luật Newton $F = ma$:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\ddot{\mathbf{r}}. \tag{A.3}$$

Dẫn theo Newton, $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$ là hợp lực tác dụng lên chất điểm. Vế bên phải $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{T}$ là moment quay của lực đó lên chất điểm quanh O. Phương trình (A.3) khi đó trở thành:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L} = \mathbf{T}, \tag{A.4}$$

là một mô phỏng dạng quay của định luật 2 của Newton $\frac{d}{dt}\mathbf{p} = \mathbf{F}$, trong đó $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ là động lượng truyền thẳng.

Đối với một tập hợp chất điểm, động lượng góc được định nghĩa là tổng của động lượng góc của các phần cấu thành.

Bảo toàn động lượng góc. Nếu tổng tất cả moment quay bên ngoài tác dụng lên hệ chất điểm bất kỳ bằng không, khi đó động lượng góc của hệ là không đổi.

Đây là hệ quả của (A.4) kết hợp định luật 3 Newton.

A.8 Tâm khối

Tâm khối của một vật rắn được định nghĩa là điểm mà ở trên đó vật ở trạng thái cân bằng theo bất kỳ phương nào trong tương quan với một trường trọng lực không đổi. Như đã đề cập trước, ta xem vật rắn như tập hợp chất điểm với khoảng cách qua lại cố định. Lập luận sau đây có thể hầu như giữ nguyên văn cho phân bố khối lượng liên tục ngoại trừ tổng $\sum a_k m_k$ phải được thay thế bằng tích phân $\int a(x)\,dm$.

Định lý 2. Tâm khối $\bar{\mathbf{r}}$ của một hệ chất điểm m_k có véc tơ vị trí $\mathbf{r}_k$ được cho theo giá trị trung bình trọng số của những vị trí này:

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{\sum m_k \mathbf{r}_k}{m} = \sum \mu_k \mathbf{r}_k \text{, trong đó } m = \sum m_k \text{ và } \mu_k = \frac{m_k}{m}. \tag{A.5}$$

Nhớ rằng μ_k là tỉ lệ của khối lượng m_k so với khối lượng tổng, nên thực chất trung bình này là tính theo khối lượng của mỗi điểm.

Chứng minh. Theo định nghĩa của điểm cân bằng $\overline{r}$, tổng moment quay của trọng lực tác động lên mỗi chất điểm [để] xoay quanh điểm này là bằng không:

$$\sum\left(\mathbf{r}_k - \overline{\mathbf{r}}\right) \times (m_k\mathbf{g}) = 0 ,$$

trong đó $\mathbf{g}$ là véc tơ thể hiện ảnh hưởng của gia tốc trọng trường. Phương trình này phải có véc tơ $\mathbf{g}$ bất kỳ, phản ánh sự kiện rằng vật phải cân bằng theo phương bất kỳ; thay vì xoay vật ngược lại, ta có thể hình dung việc đảo chiều của trọng lực. Chính là, ta chọn hệ tọa độ gắn với chất điểm. Đặt g làm nhân tử chung trong phương trình sau cùng, ta thu được:

$$\left(\sum m_k\mathbf{r}_k - m\overline{\mathbf{r}}\right) \times \mathbf{g} = \mathbf{0} \text{, trong đó } m = \sum m_k .$$

Bởi $\mathbf{g}$ là véc tơ tùy ý, ta ắt hẳn có $\sum m_k\mathbf{r}_k - m\overline{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$, điều đem lại công thức (A.5).

A.9 Moment quán tính

Ở đây ta chỉ thảo luận chỉ trường hợp hai-chiều của vật phẳng quay trên mặt phẳng của nó. Moment quán tính là một đơn vị đo của quán tính quay cũng như khối lượng là đơn vị đo của quán tính tịnh tiến. Với một chất điểm m

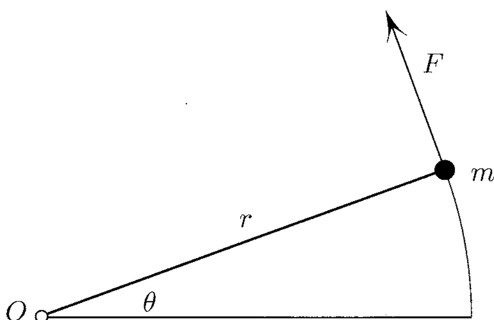
nằm cách một khoảng r đến điểm O moment quán tính quanh O được định nghĩa là mr^2 với lý do được giải thích ngắn gọn sau. Với một tập hợp những chất điểm, moment quán tính quanh O được định nghĩa là tổng (hay tích phân nếu phân bố khối lượng là liên tục) của moment quán tính của các phần cấu thành. Định nghĩa ở trên phải được giải thích để có thể sử dụng. Ta bắt đầu với một chất điểm m nằm cách một khoảng r tính từ điểm O. Nghĩ về m như được nối bằng một thanh không trọng lượng có độ dài r đến tâm, mà quanh đó nó có thể quay. Ta hãy tác dụng một lực F vào điểm này, theo phương vuông góc với thanh, để tạo ra gia tốc góc quanh O. Ta muốn định lượng quán tính quay của chất điểm trên thanh.

Quán tính tịnh tiến được lượng định theo khối lượng $m = \frac{F}{a}$, tỉ số của lực cho gia tốc. Được gợi ý bởi sự tương đồng này, ta định nghĩa moment quán tính I như là tỉ lệ của "lực quay," đó là, moment quay, cho gia tốc góc:

$$I \overset{\text{def}}{=} \frac{\text{moment quay}}{\text{gia tốc góc}} = \frac{T}{\ddot{\theta}} = \frac{rF}{\ddot{\theta}}.$$

Sau khi thế $F = ma = mr\ddot{\theta}$ vào phương trình sau cùng, số hạng $\ddot{\theta}$ triệt tiêu và ta thu được:

$$I = mr^2.$$



Hình A.6. Moment quán tính của chất điểm: moment quay/gia tốc góc $= mr^2$.

Điều này cho ta thấy tại sao định nghĩa trên có ích. Dễ dàng khái quát cho trường hợp n chất điểm: gọi r_k là khoảng cách từ điểm O đến chất điểm thứ k $m_k, k = 1,......,n$. Moment quán tính quanh điểm O của hệ chất điểm được định nghĩa là:

$$I = \sum m_k r_k^2 .$$

Định lý 3. (định lý trục song song) Gọi C là tâm khối của hệ chất điểm m_k, và gọi O là điểm tùy định. Khi đó

$$I_O = I_C = m|OC|^2 ,$$

trong đó I_C và I_O là các moment quán tính quanh các điểm C và O. Cụ thể, $I_O \geq I_C$. Nghĩa là, moment quán tính xung quanh tâm khối là nhỏ nhất.

Chứng minh. Gọi r_k là véc tơ [vị trí] từ O đến chất điểm m_k. Gọi $\mathbf{c} = \overline{OC}$ là véc tơ từ O đến tâm khối C; ta có $\mathbf{c} = \sum \mu_k \mathbf{r}_k$. Lúc này:

$$I_O = \sum m_k \mathbf{r}_k^2 = \sum m_k (\mathbf{r}_k - \mathbf{c} + \mathbf{c})^2$$
$$= \sum \left(m_k \left(r_k - \mathbf{c} \right)^2 + 2m_k \left(r_k - \mathbf{c} \right) \cdot \mathbf{c} + m_k \mathbf{c}^2 \right).$$

Tổng của số hạng ở giữa bị triệt tiêu theo định nghĩa của $\mathbf{c}$, còn lại hai số hạng I_C và $m|OC|^2$.

A.10 Cường độ dòng

Xét một dòng điện, tức là "dòng" các electron truyền qua một dây dẫn. Chọn tiết diện bất kỳ ngang phương truyền của dây dẫn. Xét lượng điện tích $q(t)$ băng qua tiết diện này từ lúc ban đầu cho đến thời điểm t. Khi đó:

$$I = \frac{dq}{dt} = \dot{q}(t)$$

cho ta vận tốc tức thời là số điện tích chuyển qua tiết diện trong mỗi giây. Vận tốc này được gọi là **dòng**, hay **cường độ dòng điện**. Dòng là như nhau cho mọi tiết diện ngang của dây dẫn, bởi (i) số electron giữa hai tiết diện cố định là xấp xỉ bằng số *không đổi* những ion trong kim loại để duy trì điện tích tổng bằng không của dây dẫn, và (ii) các electron không thoát ra khỏi lớp vỏ của dây dẫn.

Dòng điện là khái niệm mô phỏng chính xác **thông lượng** của nước trong ống dẫn. Thông lượng này có thể được đo bằng số gallon mỗi giây, cũng như dòng điện được đo bằng số coulomb (đơn vị điện tích) mỗi giây.

A.11 Điện áp

Khảo sát một trường tĩnh điện được tạo ra bởi một hay nhiều điện tích. Cố định điểm mốc O trong không gian, và gọi A là điểm khác bất kỳ. Định nghĩa điện áp $V(A)$ tại A là thế năng, so với O, của điện tích đơn vị tại A. Nói cách khác, $V(A)$ được định nghĩa là công cần có để mang điện tích đơn vị từ O đến A:

$$V(A) = -\int_O^A \mathbf{E} \cdot \mathbf{T}\, ds .$$

Ở đây $\mathbf{E}$ là lực tĩnh điện tác dụng lên một đơn vị điện tích và $\mathbf{T}$ là véc tơ chỉ phương của quãng đường* OA. Ghi nhớ rằng dấu trừ ở đây phản ánh sự kiện *ta* phải tác dụng một lực bù E để di chuyển điện tích ngược lại tác động của trường tĩnh điện.

Lấy gradient cả hai vế phương trình sau cùng, ta có lực $\mathbf{E}$ tác dụng lên một điện tích đơn vị như gradient của điện áp V:

$$\mathbf{E} = -\nabla V .$$

Cũng có thể coi mối quan hệ này như là định nghĩa (ngầm hiểu) của V, tương đương định nghĩa ta đưa ra ở trên. Định nghĩa như vậy sẽ gọn, nhưng kém hiển nhiên hơn. Lưu ý

---

* Tích phân này không phụ thuộc vào sự lựa chọn quãng đường từ O đến A. Sự độc lập này suy ra từ định luật bảo toàn năng lượng. Thực vậy, nếu tích phân dọc theo hai quãng đường khác nhau có chung điểm đầu và điểm cuối là khác nhau, tích phân cho cả một vòng có được bằng cách chập hai quãng đường sẽ là khác không. Nghĩa là khi đó ta sẽ có một trường thực hiện công khác không trong việc di chuyển một điện tích dọc theo một đường kín, trái ngược với định luật bảo toàn năng lượng.

rằng không phải tất cả trường véc tơ là một gradient của hàm vô hướng.* Trường được cho bởi một gradient của một hàm V được gọi là trường thế, và hàm V được gọi là hàm thế.

Điều này được thảo luận kỹ càng hơn trong hầu hết những tài liệu giải tích véc tơ, như trong cuốn [St].

A.12 Các định luật Kirchhoff

Các định luật Kirchhoff áp dụng được cho bất kỳ mạch điện nào, trong đó có tụ điện, điện trở, cuộn cảm, pin, diode và v.v...

Định luật thứ nhất Kirchhoff là phát biểu lại, cho một trường hợp đặc biệt, trên cơ sở rằng trong một trường tĩnh điện, công để mang một điện tích vòng quanh một đường kín sẽ bằng không.

Định luật thứ nhất của Kirchhoff. Tổng hiệu điện thế dọc theo đường kín bất kỳ của một mạch điện là bằng không.

Định luật thứ hai của Kirchhoff. Tổng dòng vào một nút bằng với tổng dòng ra nút đó.

Định luật thứ hai là hệ quả của định luật bảo toàn điện tích: cái gì đã vào nút cũng đều phải ra khỏi đó.

---

* Trường vận tốc của một đĩa quay là một ví dụ cho một trường véc tơ không phải là gradient của bất kỳ hàm nào. Trường vận tốc gió dịch chuyển lệch trên đất liền hay biển là một ví dụ khác: loại vận tốc **V** này thổi theo phương nằm ngang, với vận tốc tăng theo chiều cao. Loài hải âu lớn sử dụng bản chất phi-gradient của trường này, đó là, sự không triệt tiêu của $\oint V \times Tds$, để rút lấy năng lượng từ gió. Loài chim này có thể cứ liệng cánh mãi mà không cần những luồng không khí đẩy chúng lên!

A.13 Điện trở và định luật Ohm

Lại xét một dòng ổn định truyền qua đoạn *AB* của dây dẫn. Dây dẫn không phải là một vật dẫn lý tưởng – các electron va vào các ion trên đường di chuyển, mất năng lượng khi va chạm; chúng lấy lại năng lượng từ lực hút của điện trường tác dụng dọc theo dây dẫn. Điều này giống như cát rơi qua một dãy những lưới sàng nằm ngang. Các hạt đâm sầm vào mắt lưới, chậm lại, rơi qua, tăng tốc nhờ vào trọng lực, va vào lưới sàng kế, và cứ vậy tiếp tục. Do đó cũng không có gì đáng ngạc nhiên nếu cho rằng khi trọng lực gia tăng, thông lượng của cát sẽ tăng theo. Với dòng điện cũng tương tự. Điện áp ta tác dụng càng cao, dòng I càng mạnh lên; thật ra, thực nghiệm cho thấy rằng quan hệ này là tuyến tính. Đây là định luật Ohm:*

$$\frac{V}{I} = R = \text{constant} . \quad \text{(A.6)}$$

Hệ số R được gọi là giá trị **điện trở**. Thuật ngữ này là hòa hợp với cảm nhận chung: một giá trị điện trở lớn biểu thị rằng cần một điện áp lớn để áp dòng như cũ. Dẫn theo phương trình (A.6), R là điện áp cần có để sinh ra một đơn vị cường độ dòng.

---

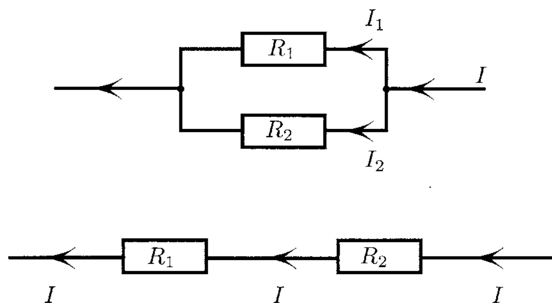
* Định luật này là chỉ xấp xỉ đúng, nhưng đủ tốt chính xác cho hầu hết vật dẫn tại nhiệt độ phòng. Tự nhiên không phải lúc nào cũng thể hiện nghiêm ngặt định luật này.

A.14 Điện trở song song

Giá trị điện trở R của hai trở kháng R_1 và R_2 mắc song song, như cho thấy trong hình A.7 là bao nhiêu? Câu trả lời rất đơn giản:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\text{, hay } R = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}.$$

Điều này hoàn toàn hiển nhiên: thực vậy, khi mắc các điện trở song song ta tăng cường khả năng dẫn điện bằng cách tạo cho dòng nhiều đường hơn để di chuyển. Công thức phát biểu rằng, thật ra, *độ điện dẫn* – nghịch đảo của giá trị điện trở – tăng. Sau đây là chứng minh.



Hình A.7. Với trường hợp mắc song song, cường độ dòng bị chia giữa hai điện trở, trong khi điện áp như nhau. Với trường hợp mắc nối tiếp, dòng là chung, trong khi điện áp tổng cộng bị chia giữa hai điện trở.

Điều đầu tiên nhận thấy là cường độ dòng bị chia nhỏ, dẫn theo định luật Kirchhoff:

$$I = I_1 + I_2\text{. (A.7)}$$

Cũng vậy, hiệu điện thế V hai đầu cả hai điện trở rõ ràng là như nhau, và định luật Ohm cho ta:

$$I = V / R,\ I_1 = V / R_1,\ I_2 = V / R_2 .$$

Thế dòng sau cùng vào (A.7) chứng minh được công thức điện trở song song.

Giá trị điện trở của $n \geq 2$ điện trở song song $R_1, \ldots\ldots, R_n$ được cho theo quy tắc cũng như trên: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \ldots\ldots + \frac{1}{R_n}$.

A.15 Điện trở nối tiếp

Khi hai điện trở kết nối thành hàng (hình A.7), giá trị điện trở của chúng cộng thêm:

$$R = R_1 + R_2 . \tag{A.8}$$

Thực vậy, hiệu điện thế hai đầu mạch kết hợp là tổng của hiệu điện thế giữa mỗi thiết bị điện trở:

$$V = V_1 + V_2 . \tag{A.9}$$

Bây giờ dòng qua cả hai thiết bị điện trở là như nhau theo định luật Kirchhoff. Định luật Ohm cho:

$$V = IR,\ V_1 = IR_1,\ V_2 = IR_2 ,$$

và thay vào (A.9), sẽ có kết quả là (A.8).

A.16 Công hao phí trong một điện trở

Cường độ dòng I chuyển qua một điện trở gây thất thoát năng lượng trong điện trở, ở dạng nhiệt. Công suất hao phí

của điện trở, đó là lượng nhiệt trên một đơn vị thời gian, được tính bằng công thức:

$$P = IV,$$

trong đó V là hiệu điện thế hai đầu điện trở. Chứng minh của dữ kiện này về cơ bản là sự lặp lại định nghĩa của V và I. Cụ thể như sau. Trước tiên chỉ xét một electron di chuyển từ đầu này sang đầu kia của điện trở. Như trái bóng bàn, electron "cuốn" theo lực hút của điện trường, đâm vào những ion và cho chúng một phần động năng của nó, làm chúng dao động và theo đó tạo nhiệt. Nhìn chung, các electron thoát ra khỏi điện trở không nhanh hơn khi chúng vào. Trên trung bình, các electron cho hết tất cả động lượng chúng có được từ "lực hút" điện ở dạng nhiệt. Theo định nghĩa của điện áp, năng lượng này bằng $(\Delta q)V$, trong đó Δq là điện tích của các electron chạy qua thiết bị điện trở. Chia cho một đơn vị thời gian, ta có:

$$\frac{(\Delta q)V}{\Delta t} = \frac{\Delta q}{\Delta t}V = IV.$$

A.17 Tụ điện và dung kháng

Tụ điện là một thiết bị bao gồm hai tấm bảng dẫn điện phân cách bởi một lớp màng cách điện mỏng. Ta hãy nối pin vào hai tấm bảng của tụ điện. Pin sẽ "hút" một số eletron ra khỏi một tấm bảng và đẩy chúng về phía tấm còn lại. Điện tích tương đương q của những electron chuyển dịch này là tỉ lệ với điện áp V của pin:

$$\frac{q}{V} = C = \text{constant}\,. \qquad \text{(A.10)}$$

Hệ số C được gọi là **điện dung**. Nó có thể được mường tượng như là lượng điện tích mà tụ điện có thể hấp thu trong khi tăng điện áp của nó lên 1; thuật ngữ "điện dung" vì vậy được giải nghĩa.

Lớp cách điện càng mỏng, thì điện dung càng cao. Sau đây là một cách giải thích đơn giản. Khi một tấm bảng có quá nhiều electron, chúng đẩy lẫn nhau và cố thoát ra khỏi bảng, qua dây dẫn, qua pin, và chạy về tấm bảng bên kia, cũng như một khí nén trong bình rỗng; còn pin, như cái bơm, giữ chúng ở lại bảng bên này. Tại sao khoảng cách giữa hai tấm bảng lại ảnh hưởng ước muốn đào tẩu của electron? Tấm bảng còn lại thiếu hụt electron, tức là nó tích điện dương. Nó sẽ hút các electron, càng mạnh khi hai tấm bảng càng gần. Nếu các tấm bảng ở rất gần nhau, thì chỉ cần một điện áp nhỏ là đủ để giữ các electron không đào tẩu. Lúc đó, tụ có điện dung lớn.

Tụ điện là một thiết bị tương tự như cái lò xo trong cơ học, và (A.10) là công thức tương tự như định luật Hooke $F = kx$ cho một lò xo đàn hồi chặt. Bộ hai định luật $V = C^{-1}q$ đến $F = kx$ là tương xứng với nhau theo từng số hạng. Cụ thể, C^{-1} là "độ cứng" của tụ điện, và tương xứng với hằng số Hooke k, đại lượng thể hiện độ cứng của lò xo. Bởi vậy cũng sẽ hợp lý khi coi $\frac{1}{k}$ như là dung kháng của lò xo.

A.18 Tính tự cảm: tính trơ của dòng điện

"Tính tự cảm" trong dòng nước. Xem nước chảy trong một ống dẫn thẳng.Ta khảo sát trong điều kiện lý tưởng: không nhớt và không chuyển động hỗn loạn. Gọi p là chênh lệch áp lực giữa hai tiết diện ngang A và B của ống, và gọi f là thông lượng, đó là, lưu lượng lưu chất trên một đơn vị thời gian truyền vuông góc qua một tiết diện ngang của ống.* Định luật thứ hai Newton ($F = ma$) áp dụng cho khối lưu chất nằm giữa A và B tại một thời điểm nào đó cho:

$$p = \mu \frac{d}{dt} f \,, \qquad \text{(A.11)}$$

trong đó μ đặc trưng tính trơ trong phản ứng với sự chênh lệch áp lực. Phương trình sau cùng suy ra từ định luật Newton như sau. Lực tác dụng lên khối lưu chất hình trụ giữa tiết diện A và B là được cho bằng $F = pS$, trong đó S là diện tích mặt-cắt-ngang của ống dẫn. Định luật thứ hai Newton áp dụng cho khối lưu chất hình trụ này cho:

$$\underbrace{pS}_{F} = \underbrace{\rho Sh}_{m} \; \underbrace{\dot{\upsilon}}_{a} \,, \qquad \text{(A.12)}$$

trong đó υ là vận tốc lưu chất và h là khoảng cách giữa A và B. Nhưng $S\upsilon = f$ là thông lượng (thể tích trên giây), và (A.12) trở thành $pS = \rho h \frac{d}{dt} f$. Chia cho S ta thu được (A.11) với $\mu = \rho h / S$.

Điện cảm. Dòng điện cũng có tính trơ như vậy. Quán tính cơ học của điện tích chuyển động đóng vai trò, dĩ nhiên, không

---

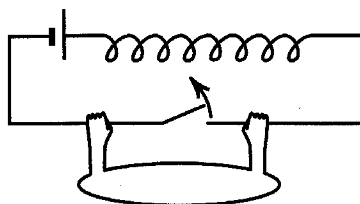
* Tiết diện không phải bài toán – f là như nhau cho tất cả chúng một khi nước là không nén được.

đáng kể; hiệu ứng chính là điện từ, cái được giải thích bởi lý thuyết tương đối giới hạn. Ta chỉ đưa ra phát biểu toán học mà không miêu tả hiện tượng vật lý xảy ra khi cường độ dòng thay đổi.

Bất kỳ thay đổi nào của dòng qua một cuộn dây cũng đòi hỏi một sự chênh lệch điện áp giữa hai đầu cuộn; đây là biểu hiện của tính tự cảm. Mối quan hệ giữa điện áp và vận tốc thay đổi của dòng là tuyến tính.

$$V = LI \tag{A.13}$$

Hệ số L được gọi là **độ tự cảm**. Theo công thức này, độ tự cảm L là điện áp cần có để tăng dòng lên 1 ampe mỗi giây.



Hình A.8. Khi công tắt mở, dòng phải tiếp tục truyền đi do “quán tính” và theo đó dẫn sang cơ thể.

Ví dụ điện giật. Tính tự cảm có thể được sử dụng để tạo một cú điện giật đau đớn từ một pin nhỏ cỡ 1,5V loại AA. Xem xét mạch điện trong hình A.8. Khi công tắc được đóng, hầu hết cường độ dòng đi qua công tắc, và chỉ một phần nhỏ không đáng kể rò rỉ qua tôi. Bây giờ điều gì xảy ra khi công tắc hở? Dòng có quán tính và nó không thích bị dừng một cách đột ngột; nó sẽ tiếp tục truyền đi theo “quán tính” trong một thời

gian qua lối đi duy nhất là tôi.* Nhìn theo một cách khác, việc mở công tắc sinh ra một cường độ I lớn, mà thông qua (A.13), sinh ra một điện áp V lớn và đau đớn.

Như hầu hết hiện tượng điện, hiện tượng này có một mô phỏng dạng cơ, cũng đớn đau không kém – là chặn một cái búa nhằm vào đinh bằng cái móng tay. Một sự giảm tốc lớn $\dot{v} = a$ tạo ra một lực tác dụng lớn $F = m\dot{v}$, điều có thể làm đau.

Một vài thiết bị phát điện dùng chuông reo để bật tắc. Khi búa dao động va vào chuông, công tắc liên tục hết mở rồi lại đóng và người sử dụng biết được thế nào là một cú điện giật liên hồi.

Đây là kết thúc bài học đau đớn của chúng ta về độ trơ.

A.19 Bộ mô phỏng điện-bơm

Tất cả khái niệm kể trên – V, I, q, R, C và L – có một mô phỏng đơn giản trong hệ thống ống nước (như là hệ thống ống nước trong nhà chẳng hạn!). Hình A.9 tóm lược sự tương đồng này.

---

* Thật thú vị khi nhận ra rằng nếu công tắc chấm dứt sự tiếp xúc, dòng có thể vẫn tiếp tục truyền qua không khí như một tia lửa điện. Một hiệu ứng có liên quan được gọi là búa nước cũng quen thuộc với những gia chủ nghe tiếng ống nước va vào nhau khi máy giặt tắt: dòng nước bị chặn bởi một van sập xuống rất nhanh, gây ra một sự tăng vọt áp lực của nước, trong khi nó vẫn muốn tiếp tục chảy.

ĐIỆN	MÔ PHỎNG HỆ THỐNG ỐNG NƯỚC
V_1 V_2 Độ sụt điện áp $V = V_2 - V_1$ Điện tích q Dung kháng $C = q/V$	Màng đàn hồi p_1 W p_2 Độ sụt áp lực $p = p_2 - p_1$ Thể tích chiếm chỗ W Độ lỏng của màng $C = W/p$
V_1 V_2 Cường độ dòng điện $I = \frac{dq}{dt}$ Điện trở $R = \frac{V}{I}$	Vật liệu xốp p_1 p_2 Thông lượng $= \frac{d(vol)}{dt}$ $R = \frac{P}{F}$
I Độ tự cảm $L = \frac{V}{dI/dt}$	p_1 p_2 F Độ trơ $L = \frac{p}{dF/dt}$

Hình A.9 Tương đồng điện-bơm

A.20 Bài tập

1. Xem xét một điện tích điểm q đặt ngay tại gốc tọa độ. Sử dụng định nghĩa của điện áp ở mục A.11, tìm điện áp tại điểm bất kỳ trong không gian.
   Ba bài tập tiếp theo không đòi hỏi kiến thức vượt quá hiểu biết về định nghĩa của điện áp.
2. Sử dụng định nghĩa của điện áp ở mục A.11, tìm vận tốc của các electron va vào màn hình TV, biết điện áp chênh lệch V giữa cathode (nơi mà từ đó các electron bắn vào phần chân không bên trong ống) và màn hình, khối lượng m, và điện tích q của một electron. Gợi ý: Thế năng của electron lúc bắt đầu phóng được chuyển hóa thành động năng khi kết thúc. V là chênh lệch thế năng cho một điện tích **đơn vị**.
3. Một tụ điện có dung kháng C được tích điện đến điện áp V. Tìm thế năng của tụ.
   Lời giải. Bài toán này có thể được giải bằng tích phân, nhưng ở đây là một cách để tránh chúng. Hình dung rằng ta tích điện cho tụ từ điện áp bằng không đến V bằng cách nối với một dòng không đổi. Điện áp trung bình trong suốt quá trình này là $\frac{1}{2}V$ (bởi điện tích, và do vậy cả điện áp, tăng tuyến tính theo thời gian). Ta có thể theo đó xem như rằng ngay cả khi ta mang điện tích từng-cái-một từ nơi này sang nơi khác, điện áp vẫn như vậy: $V/2$. Theo đó công tổng cộng để tích điện cho tụ là $W = q\ .V/2 = CV\ .V/2 = CV^2/2$.
4. Phát biểu sau đây lấy từ một giáo trình trực tuyến: "Từ định nghĩa của điện áp như năng lượng trên mỗi điện tích đơn vị, có thể kỳ vọng rằng năng lượng trữ trong tụ điện lý tưởng này sẽ chỉ là qV. Đó là, tất cả công tiêu

tốn cho điện tích để di chuyển nó từ một tấm bảng đến tấm còn lại thể hiện như năng lượng được trữ. Nhưng thực tế, công thức ở trên $(qV/2)$ cho thấy rằng chỉ một nửa của công đó hiện diện như là năng lượng trữ trong tụ điện. Với một giá trị điện trở hữu hạn, có thể chỉ ra rằng phân nửa năng lượng cung cấp từ pin để tích điện cho tụ bị hao phí ở dạng nhiệt trong thiết bị điện trở, bất kể kích cỡ của thiết bị điện trở."

Bạn có thể chứng minh hay bác bỏ phát biểu này không?

5. Tìm công suất cần có để phát sáng một bóng đèn tròn có điện áp V và giá trị điện trở R.

Lời giải. Chênh lệch điện áp giữa hai đầu dây tóc bóng đèn là V. Theo định nghĩa của điện áp, điều này có nghĩa rằng điện tích q của electron tiêu tốn năng lượng qV khi chuyển động qua dây tóc.* Công suất tiêu thụ là năng lượng trên một đơn vị thời gian: $P = qV/t = IV$, trong đó $I = q/t$ là cường độ dòng (theo định nghĩa của dòng). Theo định luật Ohm $I = V/R$, và

$$P = IV = \frac{V^2}{R}.$$

Công thức này giải thích vì sao có tiếng nổ khi nối tắt ra ngoài: một giá trị R nhỏ tạo ra một giá trị P lớn.

* Các electron "rơi" xuống một thế tĩnh điện trải dài theo dây tóc. Năng lượng chúng mất trong va chạm với những ion trộn lẫn hoàn toàn với các ion trong dây tóc, trở thành nhiệt và ánh sáng.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[ARC] Archimedes, *Geometrical Solutions Derived from Mechanics*, J. L. Heiberg dịch, Chicago: Nhà Xuất bản Open Court, 1909. Tập tin PDF hiện có tại địa chỉ Š – – ’ ã „ ‘ ‘ • • ä ‰ ‘ ‘ ‰ Ž ‡ ä … ‘ • „ ‘ ‘ • • ë ‹ † ± • —

[ARC1] Bản thảo của Archimedes, Š – – ’ ã ™ ™ ™ ä ƒ ” … Š ‹ • ’ ƒ Ž ‹ • ’ • ‡ • ¬ ä ‘ ” ‰

[ARN] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, K. Vogtmann và A. Weinstein dịch, New York: Springer-Verlag, 1978.

[BB] M. B. Balk và V. G. Boltyanskii, *Geometriya mass* (Tiếng Nga) [Hình học chất điểm], Bibliotechka Kvant [Thư viện Kvant], 61, Moscow: Nauka, 1987.

[CG] H.S.G. Coxeter và S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, Washington, DC: Hiệp hội Toán học Mỹ, 1967.

[CH] R. Courant và D. Hilbert, Methods of Mathematical Phycics, t. 2, Partial Differential Equations, In lại của bản gốc 1962, Tủ sách Tinh hoa Wiley, New York: Wiley-Interscience, 1989.

[CL] E. Coddington và N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, New York: McGraw-Hill, 1955.

[D] M. M. Day, Polygons circumscribed about closed convex curves. *Trans. Am. Math. Soc.* 62 (1947), tr. 315-319.

[DO] M. DoCarmo, *Differential Geometrical of Curves and Surfaces*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1976.

[DS] P. G. Doyle và J. L. Snell, *Random Walks and Electric Networks*, Washington, DC: Hiệp hội Toán học Mỹ.

[Fe] R. P. Feynman, *QED*, Princeton, NJ: Princeton University Press, 1985.

[Fo] R. L. Foote, Geometry of the Prytz planimeter, *Rep. Math. Phys.* 42(1-2), tr. 249-271.

[GF] I. M. Gelfand và S. V. Fomin, *Calculus of Variations*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1963.

[HZ] H. Hofer và E. Zehnder, *Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics*, Birkäuser Advanced Texts/ Basler Lehrbucher, Basel: Birkäuser Verlag, 1994.

[K] B. Yu. Kogan, *The Applications ò Mechanics to Geometry*, Chicago: University of Chicago Press, 1974.

[L1] ----------, Minimal perimeter triangles, *Am. Math. Monthly* 109 (2002), tr. 890-899.

[L2] M. Levi, A “bicycle wheel” proof of the Gauss-Bonnet theorem, dual cones and some mechanical manifestiation of the Berry phase, *Expo. Math.* 12 (1994), tr. 145-164.

[LS] Yu. I. Luybich và L. A. Shor, *The Kinemtic Method in Geometrical Problems,* V. Shokurov dịch, Moscow: Nhà Xuất bản Mir, 1980.

[LW] M. Levi và W. Weckesser, Non-holonomic effects in averaging, *Erg. Th. & Dynam. Sys.* 22 (2002), tr. 1497-1506.

[M] J. Milnor, *Morse Theory*, Annals of Mathematics Studies, Số. 51, Princeton, NJ: Princeton University Press, 1963.

[NP] R. Nevanlinna và V. Paatero. *Introduction to Complex Analysis.* Providence, RI: AMS Chelsea Publishing, 2007.

[P] G. Polya. *Mathematics and Plausible Reasoning*, t. 1, Princeton, NJ: Princeton University Press, 1990.

[Sp] M. R. Spiegel, *Complex Variables*, Schaum's Outline Series, New York: McGraw-Hill, 1968.

[St] J. Stewart, *Calculus: Concepts and Contexts,* Pacific Grove, CA: Brooks/Cole, 2001.

[Ta] A. E. Taylor, A geometric theorem and its applications to biorthogonal systems, *Bull. Am. Math. Soc.* 53 (1974), tr. 614-616.

[TO] T. F. Tokieda, Mechanical ideas in geometry, *Am. Math. Monthly* 105 (8) (1998), tr. 697-703.

[To] L. F. Toth, *Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum*, Berlin: Springer-Verlag, 1953.

[U] V. A. Uspenski, *Some Applications of Mechanics to Mathematics*, New York: Pergamon Press, 1961.

7+æ &j .+Ë 72È1 +Ð&

0$5. /(9,

+X\ 1JX\ễQ GịFK

Chịu trách nhiệm xuất bản: NGUYỄN MINH NHỰT

Chịu trách nhiệm nội dung: NGUYỄN THẾ TRUẬT

Biên tập: HẢI VÂN

Bìa: BÙI NAM

Minh họa bìa: LÊ TÙNG QUAN

Sửa bản in: THANH VIỆT

Kỹ thuật vi tính: MAI KHANH

1+¬ ;8¨7 %¦1 75¾

161B Lý Chính Thắng - Quận 3 - Thành phố Hồ Chí Minh

ĐT: 39316289 - 39316211 - 38465595 - 38465596 - 39350973

Fax: 84.8.38437450 - E-mail: nxbtre@ hcm.vnn.vn

Website: http://www.nxbtre.com.vn

&+, 1+È1+ 1;+8¨7 %¦1 75¾ 7¤, +¬ 1Ü,

Số 21, dãy A11, khu Đầm Trấu, Phường Bạch Đằng

Quận Hai Bà Trưng, Hà Nội

Điện thoại: 04.3773.4544 - Fax: 04.3512.3395

E-mail: chinhanh@nxbtre.com.vn

Website: http://www.nxbtre.com.vn



Tủ sách hợp tác giữa
nhà toán học **Ngô Bảo Châu**, nhà văn **Phan Việt** với Nhà xuất bản Trẻ

Tủ sách CÁNH CỬA MỞ RỘNG được thực hiện nhằm mục đích giới thiệu những đầu sách có giá trị của thế giới và trong nước đến bạn đọc Việt Nam, đặc biệt là bạn đọc trẻ, góp phần thúc đẩy việc đọc sách, tinh thần hiếu học, coi trọng tri thức và những giá trị sống. Các tựa sách trong tủ do nhà toán học Ngô Bảo Châu và nhà văn Phan Việt tuyển chọn và giới thiệu.

Tủ sách được phân thành ba mảng: văn học, khoa học xã hội - kinh tế, và khoa học tự nhiên; trước mắt cấu tạo tủ sách gồm 80% các sách có khả năng tiếp cận đông đảo bạn đọc và 20% cho các sách chuyên ngành. Mục tiêu của tủ sách là trong hai năm đầu sẽ phát hành 10 đầu sách, sau năm năm sẽ có từ 30 đến 50 đầu sách.

Xin mời các bạn đón đọc và đồng hành cùng tủ sách CÁNH CỬA MỞ RỘNG!

Mọi chi tiết xin liên hệ địa chỉ mail: tre.canhcuamorong@gmail.com.